בוחן תורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"א

משך הבוחן: שעה וחצי.
יש לענות על כל השאלות.
משקל כל סעיף 10 נקודות.

1. תהי G חבורה ו$a, b \in G$. הוכיחו/ הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $b = a^2$ אז $\langle b \rangle = \langle a \rangle$

(ב) אם $b = a^{-1}ba$ אז $a = b^{-1}ab$

(ג) אם $a^4 = b^2$ וגם $a^2 = b^4$ אז $a = b$

(ד) אם $a^{-1} = b^2$ אז a וb מתחלפים.

i. הפרכה: נקח $G = \mathbb{Z}_2$, $a = 1, b = 0$. אזי $b = a^2$, אולם $\langle 1 \rangle \neq \langle 0 \rangle$

ii. הוכחה: נתון $b = a^{-1}ba$. נכפיל משמאל ב $b^{-1}a$ ונקבל $b^{-1}ab = a$

iii. הפרכה: נקח $G = \mathbb{Z}_2$, $a = 1, b = 0$. מתקיים ש $a^4 = b^2$ וגם $a^2 = b^4$ אבל $a \neq b$.

iv. הוכחה: ברור שb מתחלף עם b^2. לכן נקבל שb מתחלף עם a. כלומר $ab = ba$. נכפיל בa^{-1} מימין ומשמאל ונקבל $ba^{-1} = a^{-1}b$.

2. הוכיחו/הפריכו:

(א) קיים מונומורפיזם $f : \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2 \to S_9$

(ב) קיים אפימורפיזם $f : U_{35} \to D_3$

(ג) כל הומומורפיזם $f : \Omega_\infty \to \mathbb{Z}$ הוא טריוויאלי

i. הפרכה: ידוע שמונומורפיזם שומר על סדרים של איברים. ב$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2$ יש איבר מסדר 18 - $(1, 1)$. אולם ב$\mathbb{Z}_9$ אין איבר מסדר 18, כי 18 לא יכול להיות lcm של קבוצת מספרים שסכומם קטן מ9.

ii. הפרכה: U_{35} אבלית, ואילו D_3 לא. וידוע שתמונה של חבורה אבלית היא אבלית.

iii. הוכחה: הוכחנו בתרגול שאם f הומומורפיזם אז $o(f(g)) \mid o(g)$. לכן איבר מסדר סופי נשלח לאיבר מסדר סופי. הΩ_∞ כל האיברים מסדר סופי. האיבר היחיד מסדר סופי ב$\mathbb{Z}$ הוא 0. לכן f שולחת את כל האיברים ל0, כלומר, זהו ההומומורפיזם הטריוויאלי.

3. תהי G חבורה כלשהי נגדיר $G^2 = \langle\{g^2|g \in G\}\rangle$ (תת החבורה שנוצרת ע"י קבוצת האיברים $\{g^2|g \in G\}$)

(א) הוכיחו ש $G^2 \trianglelefteq G$

(ב) תנו דוגמא לחבורה אינסופית G כך ש$G/G^2 \ncong \{e\}$ ודוגמא לחבורה אינסופית G כך ש $G/G^2 \cong \{e\}$

(ג) הוכיחו שG/G^2 אבלית.

i. יהי h איבר כללי בG^2. הוא מהצורה $g_1^2 \cdots g_n^2$ (נשים לב שאיבר כללי בחבורה הנוצרת ע"י קבוצה הוא "מילה" באיברי הקבוצה ובהופכיים שלהם. אולם קבוצת הריבועים גם ככה סגורה להופכיים). נסתכל על

$$xg_1^2 \cdots g_n^2 x^{-1}$$

הוא שווה ל

$$xg_1^2x^{-1}xg_2^2x^{-1} \cdots xg_n^{-2}x^{-1} = (xg_1^2x^{-1}) \cdots (xg_n^2x^{-1}) \in G^2$$

ii. נשים לב ש$G/G^2 = \{e\}$ אמ"ם $G = G^2$. נקח $G = \mathbb{Z}$ אז $G^2 = 2\mathbb{Z}$ ולכן G/G^2 לא טריוויאלי. לדוגמא השניה נקח $G = \mathbb{Q}$. ידוע שלכל איבר יש "שורש" (כלומר- חצי). לכן $G = G^2$

iii. כל איבר בG/G^2 הוא מסדר 2, כי

$$(xG^2)^2 = x^2G^2 = G^2$$

מכיוון ש$x^2 \in G^2$.

הוכחנו בתרגול הראשון שאם כל איבר בחבורה הוא מסדר 2 (פרט לאיבר היחידה) אז החבורה אבלית.