מבנים אלגבריים - תירגול 7

13 בדצמבר 2015

תרגיל: הוכח כי $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$
פתרון: ראינו כי $(1,1)$ יוצר של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ והסדר שלו 6. ל $\mathbb{Z}_6$ יש ג"כ יוצר מסדר 6 שהוא 1. נגדיר $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ע"י $\phi(1) = (1,1)$ (צריך לבדוק רק שהפונקציה מוגדרת).
בעצם שניהם איזומורפיזים לחבורה מופשטת שהיא $\{g^6 = 1, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}$. גם שורשי יחידה מסדר 6 היא כזאת עם יוצר $e^{\frac{2\pi i}{6}}$
תרגיל: כמה איזומורפיזמים יש בין $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ל - $\mathbb{Z}_6$
פתרון: מספיק לקבוע לאיפה נשלח 1. בנוסף, 1 צריך להשלח ליוצר וכל יוצר יגדיר לי איזמו' אחר. לכן השאלה שקולה לכמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ שראינו בעבר שהתשובה היא 2
חידוד על הומו'.
תרגיל: כמה הומו' יש בין $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ וכמה $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$
פתרון: אם קיים הומו' $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ אז הוא נקבע ע"י $\phi(1)$ נסמן $\phi(1) = a$ אזי צריך להתקיים

$$0 = \phi(0) = \phi(n \cdot 1) = n\phi(1) = na$$

האיבר היחיד שמתקים זאת הוא $a = 0$ ולכן קיים הומו' יחיד
לצד השני: אם קיים $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$אז הוא נקבע ע"י $\phi(1)$ נסמן $\phi(1) = [a]$. באופן מפורש ההומורפיזים הוא $\phi(m) = m[a] = [ma]$ כלומר $m \mapsto ma \mod n$לא צריך להתקיים שום יחס נוסף ולכן כל $a \in \mathbb{Z}_n$ יגדיר הומו' והם יהיו הומו' שונים. ולכן קיימים n הומו' שונים.
משפט: G חבורה H ת"ח אזי $|H|$ מחלק את $|G|$ בפרט הסדר של איבר מחלק את סדר החבורה. בנוסף $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$
תרגיל: תהא G חבורה עם 6 איברים (למשל S_3). כמה הומו' קיימים $\phi : \mathbb{Z}_6 \to G$?
פתרון מתקיים לכל $g \in G$ כי $g^6 = e$ ולכן אם נשלח את $g \to 1$ נקבל הומו' מוגדר היטב כי היחס היחידי $6 \cdot 1 = 0$ מתקיים גם בתמונה. ולכן קיימים 6 הומו' שונים.
תהא G חבורה. יהיו H_1, H_2 תתי חבורות מסדר סופי. נסמן $|H_1| = n_1, |H_2| = n_2$. נניח כי n_1, n_2 מספרים זרים . הוכח כי

$$H_1 \cap H_2 = \{e\}$$

פתרון: $H_1 \cap H_2$ תת חבורה של H_1, H_2 ולכן הסדר שלה מחלק את n_1, n_2 כיוון שהספרים זרים נקבל כי הסדר הוא 1 כלומר $H_1 \cap H_2 = \{e\}$
תרגיל: יהא $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{101}$ שדה. אזי $\mathbb{F}^{\times}$ היא חבורה כפלית עם יחידה 1 בעלת $100 = 2^2 5^2$ איברים. טענה זוהי חבורה ציקלית.

הוכחה: נסתכל על המשוואות $x^{2\cdot 5^2} = 1$ ו $x^{2^2\cdot 5} = 1$. קיימים $a,b \in \mathbb{F}$ שונים מאפס שלא מקיימים את המשוואות (כי למשוואה ממעלה n יש לכל היותר n פתרונות), כלומר $b^{50} \neq 1 \neq a^{20}$. נגדיר $g = a^4 b^{25}$. טענה הסדר של g הוא 100.
הוכחה: ק נסמן $k = o(g)$ אזי $k|100$. אם $k < 100$ אזי $k = 2^\alpha 5^\beta$ כאשר אחת מהחזקות קטנה ממש מ־2. נניח כי $\alpha < 2$ (המקרה השני דומה) אזי $k|2\cdot 5^2$ ולכן $g^{2\cdot 5^2} = 1$. אבל $b^{2\cdot 5^4} = a^{100\cdot 2} b^{2\cdot 5^4} = g^{2\cdot 5^2} = 1$ ולכן

$$o(b)|gcd(2\cdot 5^4, 2^2 5^2) = 2\cdot 5^2$$

ולכן $b^{2\cdot 5^2} = 1$ סתירה.