תרגילים ממבחנים של אחרים

מדעי המח תשפג מועד א

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{2x}{y+x^2y}$ המקיים $y(0) = -2$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון.

$$y' = \frac{2x}{y+x^2y} = \frac{2x}{y\left(1+x^2\right)}$$

ולכן $yy' = \frac{2x}{(1+x^2)}$. זוהי מדר פרידה ובכתיב אחר:

$$y\mathrm{dy} = \frac{2x}{(1+x^2)}\mathrm{dx}$$

ונעשה אינטגרלים לשני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו).

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left(1+x^2\right) + C$$

ולכן

$$y = \pm\sqrt{2\ln\left(1+x^2\right)+C}$$

(זה לא אותו C ממקודם). נציב תנאי התחלה

$$-2 = y(0) = -\sqrt{2\ln\left(1+0^2\right)+C}$$

(חייבים לבחור את הפתרון עם המינוס) ואז

$$4 = C$$

ולכן הפתרון הסופי הוא

$$y=-\sqrt{2\ln\left(1+x^2\right)+4}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\left(x+y^2\right)\mathrm{dx}-2xy\mathrm{dy}=0$ המקיים $y(1)=1$.

פתרון: נבדוק אם המד"ר מדוייקת. נסמן

$$P\left(x,y\right)=x+y^2$$
$$Q\left(x,y\right)=-2xy$$

ואז

$$P_y=2y \quad Q_x=-2y$$

ולכן היא אינה מדויקת. נדייק אותו בעזרת

$$\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}\mathrm{dx}}=e^{\int\frac{2y+2y}{-2xy}\mathrm{dx}}=e^{-2\int\frac{1}{x}\mathrm{dx}}=e^{-2\ln(x)}=x^{-2}$$

כלומר: נסתכל על המד"ר השקולה שכעת מדויקת:

$$\frac{\left(x+y^2\right)}{x^2}\mathrm{dx}-\frac{2y}{x}\mathrm{dy}$$

ונגדיר מחדש

$$P\left(x,y\right)=\frac{x+y^2}{x^2}$$
$$Q\left(x,y\right)=-\frac{2y}{x}$$

וכעת נגדיר

$$U\left(x,y\right)=\int Q\left(x,y\right)\mathrm{dy}=-\frac{y^2}{x}+c(x)$$

ונמצא את $c(x)$. כיוון שצריך $U_x=P$, נשווה ביניהם:

$$U_x=\frac{y^2}{x^2}+c'(x)=\frac{x+y^2}{x^2}$$

לכן

$$c'(x) = \frac{x+y^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x}$$

ולכן $c(x) = \ln|x|$. מכאן ש $U(x,y) = C$ או

$$-\frac{y^2}{x} + \ln|x| = C$$

ולכן

$$\pm\sqrt{x\left(\ln|x| + C\right)} = y$$

ונציב תנאי התחלה.

$$1 = y(1) = \pm\sqrt{1\left(\ln|1| + C\right)}$$

ולכן צריך לבחור את הפתרון החיובי ובנוסף $C = 1$. לסיכום:

$$y = \sqrt{x\left(\ln|x| + 1\right)}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 3y' + 2y = e^x$ המקיים $y(0) = 2, y'(0) = 2$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y'' - 3y' + 2y = 0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

בעל שורשים $1, 2$ ולכן e^x, e^{2x} בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x) = e^x$ שמתאים ל 1 שהינו שורש של הפולינום האופייני, ננחש פתרון מהצורה $y_p = \alpha x e^x$. מתקיים

$$y_p' = \alpha(1+x)e^x$$
$$y_p'' = \alpha(2+x)e^x$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} e^x &= \alpha\left(2+x\right)e^x - 3\alpha\left(1+x\right)e^x + 2\alpha x e^x \\ &= \left[\left(2+x\right) - 3\left(1+x\right) + 2x\right]\alpha e^x \\ &= -\alpha e^x \end{aligned}$$

ונקבל $\alpha = -1$. לסיכום:

$$y_p = -xe^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = -xe^x + C_1e^x + C_2e^{2x}$$

ו

$$y' = -\left(1+x\right)e^x + C_1e^x + 2C_2e^{2x}$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$2 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$2 = y'(0) = -1 + C_1 + 2C_2$$

ולכן $C_1 = 2 - C_2$ ו $C_1 = 3 - 2C_2$. מכאן ש $3 - 2C_2 = 2 - C_2$ ולכן $C_2 = 1$ ואז $C_1 = 2 - 1 = 1$. לסיכום:

$$y = -xe^x + e^x + e^{2x}.$$

4. כדור בעל מסה $m = 1\text{kg}$ נעזב במהירות התחלתית אפס. מה תהיה מהירות הכדור לאחר 2 שניות כאשר: (בשתי הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$).

(א) הכח היחיד הפועל על הכדור הוא כח המשיכה mg.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מטה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון החיובי. לכן הכח הוא g.

מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$g=ma=a$$

או $g=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t)=gt+c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0)=0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0=y'(0)=g\cdot 0+c=c$$

ולכן $y'(t)=gt$. המהירות לאחר 2 שניות היא $y'(2)=g\cdot 2=20$ (מטר לשניה).

(ב) הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה mg וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות v

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מטה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון החיובי. בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $g-v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$g-v=ma=a$$

או $g-y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+z=g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=1,b(x)=g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C+\int ge^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}\left(C+ge^{bx}\right)=e^{-x}C+g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-t}C+g$$

או

$$.y'(t) = e^{-t}C + g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = e^{-0}C + g = C + g$$

ומכאן $C = -g$. מכאן שהמהירות אחרי 2 שניות היא

$$.y'(2) = e^{-2} \cdot (-g) + g = g\left(1 - e^{-2}\right)$$

מדעי המח תשפג מועד ב

5. מצאו פתרון למד"ר $(xy' - 1)\ln(x) = 2y$ המקיים $y(e) = 0$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון. נעביר אגפים $y'x\ln(x) - 2y = \ln(x)$. נחלק ב $x\ln(x)$ לקבל

$$y' - \frac{2}{x\ln(x)}y = \frac{1}{x}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $b(x) = \frac{1}{x}, a(x) = -\frac{2}{x\ln(x)}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב $A(x)$:

$$A(x) = \int -\frac{2}{x\ln(x)}\mathrm{dx} = \left\{\begin{array}{c} t = \ln(x) \\ \mathrm{dt} = \frac{1}{x}\mathrm{dx} \end{array}\right\} = -2\int \frac{1}{t}\mathrm{dt} = -2\ln|\ln(x)|$$

ואז נציב

$$e^{2\ln|\ln(x)|}\left(C + \int \frac{1}{x}e^{-2\ln|\ln(x)|}\mathrm{dx}\right) = \ln^2(x)\left(C + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx}\right)$$

נחשב

$$\int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx} = \left\{\begin{array}{c} t = \ln(x) \\ \mathrm{dt} = \frac{1}{x}\mathrm{dx} \end{array}\right\} = \int \frac{1}{t^2}\mathrm{dt} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln(x)}$$

ולכן, פתרון כללי הוא

$$\begin{aligned} y(x) &= \ln^2(x)\left(C + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx}\right) \\ &= \ln^2(x)C - \ln(x) \end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה $y(e) = 0$ למצוא את הקבוע C.

$$0 = y(e) = \ln^2(e)C - \ln(e) = C - 1$$

לכן $C = 1$ והפתרון הוא

$$y(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$$

6. מצאו פתרון למד"ר $\left(1 + y^2\sin(2x)\right)\mathrm{dx} - 2y\cos^2(x)\mathrm{dy} = 0$ המקיים $y(0) = -2$.

פתרון: נבדוק אם המד"ר מדוייקת. נסמן

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 1 + y^2\sin(2x) \\ Q(x,y) &= -2y\cos^2(x) \end{aligned}$$

ואז

$$P_y = 2y\sin(2x) \quad Q_x = 4y\cos(x)\sin(x) = 2y\sin(2x)$$

ולכן היא מדויקת. כעת נגדיר

$$U(x,y) = \int Q(x,y)\,\mathrm{dy} = -y^2\cos^2(x) + c(x)$$

ונמצא את $c(x)$. כיוון שצריך $U_x = P$, נשווה בניהם:

$$U_x = 2y^2\cos(x)\sin(x) + c'(x) = 1 + y^2\sin(2x)$$

$$y^2\sin(2x) + c'(x) = 1 + y^2\sin(2x)$$

לכן $c'(x)=1$ ומכאן ש $c(x)=x$. סה"כ נקבל ש $U(x,y)=C$ או

$$-y^2\cos^2(x)+x=C$$

ולכן

$$\pm\sqrt{\frac{x+C}{\cos^2(x)}}=y$$

ונציב תנאי התחלה.

$$-2=y(0)=\pm\sqrt{\frac{0+C}{\cos^2(0)}}=\pm\sqrt{C}$$

ולכן צריך לבחור את הפתרון החיובי ובנוסף $C=4$. לסיכום:

$$y=-\sqrt{\frac{x+4}{\cos^2(x)}}.$$

7. מצאו פתרון למד"ר $y''-2y'+y=xe^{2x}$ המקיים $y(0)=0, y'(0)=0$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y''-2y'+y=0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=C_1e^x+C_2xe^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=xe^{2x}$ שהוא פולינום מדרגה 1 שמוכפל ב e^{2x} (שמתאים ל 2 שהוא לא שורש של הפולינום האופייני), ננחש פתרון מהצורה $y_p=(\alpha_0+\alpha_1x)e^{2x}$. מתקיים

$$y_p'=[2(\alpha_0+\alpha_1x)+\alpha_1]e^{2x}$$
$$y_p''=[4(\alpha_0+\alpha_1x)+2\alpha_1+2\alpha_1]e^{2x}=4(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1x)e^{2x}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} xe^{2x} &= 4\left(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1 x\right)e^{2x} - 2\left[2\left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)+\alpha_1\right]e^{2x} + \left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)e^{2x} \\ &= \left[4\left(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1 x\right) - 2\left[2\left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)+\alpha_1\right] + \left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)\right]e^{2x} \\ &= \left[\left(2\alpha_1+\alpha_0\right)+\alpha_1 x\right]e^{2x} \end{aligned}$$

ונקבל

$$x = \left(2\alpha_1+\alpha_0\right)+\alpha_1 x$$

ולכן $\alpha_1 = 1$ ו $2\alpha_1+\alpha_0 = 0$. ולכן $\alpha_1 = 1, \alpha_0 = -2$. לסיכום:

$$y_p = \left(-2+x\right)e^{2x}$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = \left(-2+x\right)e^{2x} + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = \left(-3+2x\right)e^{2x} + C_1 e^x + C_2\left(x+1\right)e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0 = y(0) = -2 + C_1$$

$$0 = y'(0) = -3 + C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 2$ ו $C_2 = 3 - C_1 = 1$. לסיכום:

$$y = \left(-2+x\right)e^{2x} + 2e^x + xe^x.$$

8. כדור בעל מסה $m = 1\text{kg}$ נבעט לכיוון מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. מה יהיה גובה הכדור ברגע שהמהירות הרגעית שלו תתאפס כאשר: (בשני הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$.)

(א) הכח היחיד הפועל על הכדור הוא כח המשיכה mg.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = 20$ (המהירות ההתחלתית 20 כלפי מעלה שהוא הכיוון החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt + 20$. המהירות תתאפס כאשר $y'(t) = 0$ או

$$gt = 20$$

כלומר לאחר $t = \frac{20}{g} = 2$ שניות. המיקום $y(t)$ שווה ל

$$y(t) = \int y' = -g\frac{t^2}{2} + 20t + C$$

ומתנאי ההתחלה $y(0) = 0$ נקבל

$$0 = C$$

לכן $y(t) = -g\frac{t^2}{2} + 20t$ והגובה שלו לאחר 2 שניות (הזמן שהמהירות מתאפסת) הוא

$$y(2) = -g\frac{4}{2} + 40 = 20.$$

(ב) הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה mg וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות v.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (כלומר $-g$). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל

הוא $-g-v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-v=ma=a$$

או $-g-y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+z=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=1,b(x)=-g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C-\int ge^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}\left(C-ge^{bx}\right)=e^{-x}C-g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-t}C-g$$

או

$$.y'(t)=e^{-t}C-g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה שהוא החיובי) לכן

$$20=y'(0)=e^{-0}C-g=C-g$$

ומכאן $C=20+g=30$. קיבלנו $y'(t)=30e^{-t}-g$ והמהירות מתאפס כאשר $y'(t)=0$ או

$$g=30e^{-t}$$

$$e^{-t}=\frac{1}{3}$$

$$-t=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

ולכן $t=\ln(3)$. המיקום הוא

$$y(t)=\int y'=\int\left(30e^{-t}-g\right)=-30e^{-t}-gt+C$$

ותנאי ההתחלה $y(0)=0$ יתן

$$0=-30+C$$

כלומר $C=30$ ו $y(t)=-30e^{-t}-gt+30$. הגובה בזמן $t=\ln(3)$ בו המהירות מתאפסת הוא

$$\begin{aligned}y\left(\ln(3)\right)&=-30e^{-(\ln(3))}-g\left(\ln(3)\right)+30\\&=-30\frac{1}{3}-10\ln(3)+30\\&=20-10\ln(3)\end{aligned}$$

הנדסה תשפג מועד ב

9. מצאו פתרון למד"ר $\left(e^x+1\right)y'+1=-ye^x$ המקיים $y(0)=0$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון. נעביר אגפים $\left(e^x+1\right)y'+ye^x=-1$. נחלק ב e^x+1 לקבל

$$y'+y\frac{e^x}{(e^x+1)}=-\frac{1}{(e^x+1)}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $a(x)=\frac{e^x}{e^x+1},b(x)=-\frac{1}{e^x+1}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב $A(x)$:

$$A(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{c}t=e^x\\\mathrm{dt}=e^x\mathrm{dx}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t+1}\mathrm{dt}=\ln\left(e^x+1\right)$$

ואז נציב

$$e^{-\ln(e^x+1)}\left(C-\int\frac{1}{e^x+1}e^{\ln(e^x+1)}\mathrm{dx}\right)=\frac{1}{e^x+1}\left(C-\int1\mathrm{dx}\right)=$$

$$= \frac{C-x}{e^x+1}$$

ולכן, פתרון כללי הוא

$$y(x) = \frac{C-x}{e^x+1}$$

נציב תנאי התחלה $y(0)=0$ למצוא את הקבוע C.

$$0 = y(0) = \frac{C}{1+1}$$

לכן $C=0$ והפתרון הוא

$$y(x) = \frac{-x}{e^x+1}$$

10. מצאו שני פתרונות למד"ר $(x+xy)\,y' = \frac{1}{2}$ המקיימים $y\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

פתרון: נוציא x:

$$(1+y)\,y' = \frac{1}{2}$$

ונחלק x ורשום בצורה שקולה

$$(1+y)\,\mathrm{dy} = \frac{\mathrm{dx}}{2x}$$

לקבל מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו):

$$y + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

נעביר אגף ו

$$\frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2}\ln|x| + C = 0$$

(C קבוע כל שהוא. לא אותו אחד ממקודם). לכן

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)} = -1 \pm \sqrt{1+\ln|x|+C}$$

ויש שתי פתרונות (שמתאימים ל $\pm$). נציב תנאי התחלה $y\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ בכל אחד לקבל פתרון פרטי. הראשון:

$$y_1(x) = -1 + \sqrt{1 + \ln|x| + C}$$

ואז

$$-1 = y_1\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \sqrt{1 - 1 + C}$$

ולכן $\sqrt{C} = 0$. מכאן ש $C = 0$. הפתרון השני:

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{1 + \ln|x| + C}$$

ואז

$$-1 = y_2\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - \sqrt{1 - 1 + C}$$

ולכן $C = 0$ כמו מקודם. לסיכום, שני הפתרונות הם:

$$y_1(x) = -1 + \sqrt{1 + \ln|x|}$$

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{1 + \ln|x|}$$

11. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = 2e^x$ המקיים $y(0) = 2, y'(0) = 5$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y'' - 2y' + y = 0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x) = 2e^x$ שהוא פולינום מדרגה 0 שמוכפל ב e^x (שמתאים ל

1 שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2, ננחש פתרון מהצורה $y_p = \alpha x^2 e^x$. מתקיים

$$y_p' = \alpha \left(x^2 + 2x\right) e^x$$
$$y_p'' = \alpha \left(x^2 + 4x + 2\right) e^x$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} 2e^x &= \alpha \left(x^2 + 4x + 2\right) e^x - 2\alpha \left(x^2 + 2x\right) e^x + \alpha x^2 e^x \\ &= \left[\left(x^2 + 4x + 2\right) - 2\left(x^2 + 2x\right) + x^2\right] \alpha e^x \\ &= 2\alpha e^x \end{aligned}$$

ונקבל $\alpha = 1$ והפתרון הפרטי

$$y_p = x^2 e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = \left(x^2 + 2x\right) e^x + C_1 e^x + C_2 (x + 1) e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$2 = y(0) = C_1$$

$$5 = y'(0) = C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 2$ ו $C_2 = 5 - C_1 = 3$. לסיכום:

$$y = x^2 e^x + 2e^x + 3xe^x.$$

12. כדור בעל מסה $m = 2$ נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. הניחו כי קבוע הכבידה של כדור הארץ הוא $g = 10$ מטר לשנייה בריבוע.

(א) בהנחה שכוח המשיכה הוא הכוח היחיד הפועל על הכדור, חשבו את הזמן בו הכדור יגיע לשיא הגובה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$.
מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g=ma=a$$

או $g=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t)=-gt+c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0)=20$ (המהירות ההתחלתית 20 כלפי מעלה שהוא הכיוון החיובי) לכן

$$20=y'(0)=-g\cdot 0+c=c$$

ולכן $y'(t)=-gt+20$. בגובה המקסימאלי, המהירות תתאפס, וזה קורה כאשר $y'(t)=0$ או

$$gt=20$$

כלומר לאחר $t=\frac{20}{g}=2$ שניות.

(ב) בהנחה שבנוסף לכוח המשיכה, כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל המהירות, מה תהיה מהירות הכדור ומה יהיה כיוונה לאחר שנייה אחת?

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי (כלומר $-g$). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-g-\frac{1}{2}v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-\frac{1}{2}v=ma=a$$

או $-g-\frac{1}{2}y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+\frac{1}{2}z=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = \frac{1}{2}, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = \frac{1}{2}x$ ונציב

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(C - \int ge^{\frac{1}{2}x}\mathrm{dx}\right) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C - 2ge^{\frac{1}{2}x}\right) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g$$

או

$$y'(t) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g.$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה שהוא החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}C - 2g = C - 2g$$

ומכאן $C = 20 + 2g = 40$. קיבלנו $y'(t) = 40e^{-\frac{1}{2}x} - 2g$ והמהירות אחרי שניה המהירות תהיה

$$y'(1) = 40e^{-\frac{1}{2}\cdot 1} - 2g = \frac{40}{\sqrt{e}} - 20 \approx 4.26$$

בכיוון החיובי (כלומר כלפי מעלה).

$$x = 2\ln(2)$$

הנדסה תשפג בוחן

13. מצאו פתרון למד"ר $y' = x\left(y^3 - y\right)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

פתרון: נחלק

$$\frac{y'}{(y^3 - y)} = x$$

או

$$\frac{\mathrm{dy}}{\left(y^3-y\right)}=x\mathrm{dx}$$

שזוהי מד"ר פרידה. נעשה אינטגל על כל אחד מהאגפים, לפי המשתנה שלו:

$$\int\frac{\mathrm{dy}}{\left(y^3-y\right)}=\frac{x^2}{2}+C$$

ונחשב $\int\frac{\mathrm{dy}}{\left(y^3-y\right)}$ על ידי פירוק לשברים חלקיים: קיימים קבועים A,B,C כך ש

$$\frac{1}{\left(y^3-y\right)}=\frac{1}{y\left(y^2-1\right)}=\frac{1}{y\left(y-1\right)\left(y+1\right)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}+\frac{C}{y+1}$$

נמצא אותם. נעשה מכנה משותף ונשווה מונים:

$$1=A\left(y-1\right)\left(y+1\right)+By\left(y+1\right)+Cy\left(y-1\right)$$

נציב $y=0$ לקבל $1=-A$ ולכן $A=-1$. נציב $y=1$ לקבל $1=2B$ ולכן $B=\frac{1}{2}$. נציב $y=-1$ לקבל $1=2C$ ולכן $C=\frac{1}{2}$. לכן

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{dy}}{\left(y^3-y\right)}&=\int\left(\frac{-1}{y}+\frac{\frac{1}{2}}{y-1}+\frac{\frac{1}{2}}{y+1}\right)\mathrm{dy}\\&=-\ln\left|y\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y+1\right|\\&=\ln\left|y\right|^{-1}+\ln\left|y-1\right|^{\frac{1}{2}}+\ln\left|y+1\right|^{\frac{1}{2}}\\&=\ln\left(\left|y\right|^{-1}\left|y-1\right|^{\frac{1}{2}}\left|y+1\right|^{\frac{1}{2}}\right)\\&=\ln\left(\frac{\sqrt{\left|y-1\right|\left|y+1\right|}}{\left|y\right|}\right)\\&=\ln\left(\sqrt{\frac{\left|y^2-1\right|}{\left|y^2\right|}}\right)\\&=\ln\left(\sqrt{\left|1-\frac{1}{y^2}\right|}\right)\end{aligned}$$

כעת נציב בשיויון $\int\frac{\mathrm{dy}}{\left(y^3-y\right)}=\frac{x^2}{2}+C$ ונבודד את y

$$\ln\left(\sqrt{\left|1-\frac{1}{y^2}\right|}\right)=\frac{x^2}{2}+C$$

$$\sqrt{\left|1-\frac{1}{y^2}\right|}=e^{\frac{x^2}{2}}e^C$$

$$\left|1-\frac{1}{y^2}\right|=e^{x^2}e^C$$

$$1-\frac{1}{y^2}=\pm e^{x^2}e^C$$

$$1\mp e^{x^2}e^C=\frac{1}{y^2}$$

$$y^2=\frac{1}{1\mp e^{x^2}e^C}$$

ולסיום:

$$y=\sqrt{\frac{1}{1\mp e^{x^2}e^C}}$$

נציב תנאי התחלה $y(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=y(0)=\frac{1}{\sqrt{1\mp e^C}}$$

$$\sqrt{1\mp e^C}=\sqrt{2}$$

$$1\mp e^C=2$$

$$\mp e^C=1$$

$$e^C=\pm 1$$

לכן צריך לקחת את הפלוס ואז

$$C=\ln(1)$$

ולסיכום:

$$.y(x)=\sqrt{\frac{1}{1+e^{x^2}e^{\ln(1)}}}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{x^2}}}$$

14. מצאו פתרון למד"ר $\left(1-\frac{y}{x}\right)y'=1-\frac{y}{x}-\frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נחלק ב $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ לקבל:

$$y'=1-\frac{e^x}{2x\left(1-\frac{y}{x}\right)}$$

$$y'=1-\frac{e^x}{2\left(x-y\right)}$$

נגדיר $z=x-y$ ואז $z'=1-y'$ ונציב:

$$1-z'=1-\frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z}=z'$$

$$e^x=2zz'$$

ובצורה שקולה

$$.e^x\mathrm{dx}=2z\mathrm{dz}$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x+C=z^2$$

וקיבלנו

$$z=\pm\sqrt{e^x+C}$$

נחזור ל y:

$$.y = x - z = x \pm \sqrt{e^x + C}$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 0$

$$0 = y(1) = 1 \pm \sqrt{e + C}$$

$$\pm\sqrt{e + C} = -1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את C

$$\sqrt{e + C} = 1$$

$$C = 1 - e$$

וסה"כ התשובה היא

$$.y(x) = x - \sqrt{e^x + 1 - e}$$

15. כדורגל בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נבעט כלפי מעלה מהרצפה במהירות התחלתית של $20\ m/sec$. הניחו כי כוח המשיכה הוא קבוע ושווה ל mg, כאשר g קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ. הניחו כי $g = 10$. מצאו את גובה הכדור לאחר 2 שניות, במקרים הבאים:

(א) בהנחה שאין כוחות נוספים פרט לכוח המשיכה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $-g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0)=20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$20=y'(0)=-g\cdot 0+c=c$$

ולכן $y'(t)=-gt+20$. המהירות לאחר 2 שניות היא $y'(2)=-g\cdot 2+20=0$ (מטר לשניה).

(ב) בהנחה שכוח התנגדות האוויר בכל רגע שווה בגודלו לגודל המהירות של הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $-g-v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-v=ma=a$$

או $-g-y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+z=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=1, b(x)=-g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C-\int ge^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}\left(C-ge^{x}\right)=e^{-x}C-g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-t}C-g$$

או

$$y'(t)=e^{-t}C-g.$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$20=y'(0)=e^{-0}C-g=C-g$$

ומכאן $C = 20 + g$. מכאן שהמהירות אחרי 2 שניות היא

$$.y'(2) = e^{-2} \cdot (20+g) - g = 30e^{-2} - 10 = -5.94$$

כלומר המהירות 5.94 כלפי מטה.

מתמטיקה תשפג מועד ב

16. מצאו פתרון למד"ר $x^2y' + xy + 1 = 0$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 0$.

פתרון: אחרי חילוק ב x^2 והעברת אגף נקבל

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = \frac{1}{x}, b(x) = -\frac{1}{x^2}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב

$$A(x) = \int a(x)\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \ln|x|$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}.y(t) &= e^{-\ln|x|}\left(C + \int -\frac{1}{x^2}e^{\ln|x|}\mathrm{dx}\right)\\ &= |x|^{-1}\left(C - \int \frac{1}{x^2}|x|\,\mathrm{dx}\right)\\ &= |x|^{-1}C - |x|^{-1}\int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}\end{aligned}$$

כעת: עבור $x > 0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx} = x^{-1}\int \frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ועבור $x < 0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx} = -x^{-1}\int \frac{-x}{x^2}\mathrm{dx} = x^{-1}\int \frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ולכן נוכל להמשיך עם $x^{-1}\int \frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$. נמשיך:

$$\begin{aligned} y(x) &= |x|^{-1} C - |x|^{-1} \int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx} \\ &= |x|^{-1} C - x^{-1} \int \frac{x}{x^2}\mathrm{dx} \\ &= |x|^{-1} C - x^{-1} \ln|x| \end{aligned}$$

ונציב תנאי התחלה $y(1)=0$.

$$0 = y(1) = |1|^{-1} C - 0 = C$$

ולכן

$$y(x) = -x^{-1}\ln|x|.$$

17. מצאו פתרון למד"ר $\left(1-\frac{y}{x}\right)y' = 1-\frac{y}{x}-\frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נחלק ב $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ לקבל:

$$y' = 1 - \frac{e^x}{2x\left(1-\frac{y}{x}\right)}$$

$$y' = 1 - \frac{e^x}{2(x-y)}$$

נגדיר $z=x-y$ ואז $z'=1-y'$ ונציב:

$$1 - z' = 1 - \frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z} = z'$$

$$e^x = 2zz'$$

ובצורה שקולה

$$e^x\mathrm{dx} = 2z\mathrm{dz}.$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x + C = z^2$$

וקיבלנו

$$z = \pm\sqrt{e^x + C}$$

נחזור ל y:

$$y = x - z = x \pm \sqrt{e^x + C}.$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 0$

$$0 = y(1) = 1 \pm \sqrt{e + C}$$

$$\pm\sqrt{e + C} = -1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את C

$$\sqrt{e + C} = 1$$

$$C = 1 - e$$

וסה"כ התשובה היא

$$y(x) = x - \sqrt{e^x + 1 - e}.$$

18. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = xe^x$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר ההומוגנית $y'' - 2y' + y = 0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x) = xe^x$ שהוא פולינום מדרגה 1 שמוכפל ב e^x (שמתאים ל 1 שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2), ננחש פתרון מהצורה $y_p = (\alpha_0 + \alpha_1 x)\, x^2 e^x$. מתקיים

$$\begin{aligned}
y_p' &= \left((\alpha_0 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\,(\alpha_0 + \alpha_1 x) + \alpha_1 x^2\right) e^x \\
&= \left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\alpha_0\right) e^x \\
y_p'' &= \left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\alpha_0 + 2\alpha_0 + 2x\,(\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + \alpha_1 x^2\right) e^x \\
&= \left((\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\,(2\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + 2\alpha_0\right) e^x
\end{aligned}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned}
xe^x &= (\alpha_0 + \alpha_1 x)\, x^2 e^x - 2\left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\alpha_0\right) e^x \\
&\quad + \left((\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\,(2\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + 2\alpha_0\right) e^x \\
&= \left[2\alpha_0 + 6\alpha_1 x\right] e^x
\end{aligned}$$

ונקבל $2\alpha_0 = 0, 6\alpha_1 = 1$. מכאן ש $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \frac{1}{6}$ והפתרון הפרטי הוא

$$y_p = \left(0 + \frac{1}{6}x\right) x^2 e^x = \frac{1}{6}x^3 e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{6}x^3 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) e^x + C_1 e^x + C_2\,(x+1)\, e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0 = y(0) = C_1$$

$$1 = y'(0) = C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 0$ ו $C_2 = 1 - C_1 = 1$. לסיכום:

$$.y = \frac{1}{6}x^3e^x + xe^x$$

19. כדורגל בעל מסה של $m = 2\text{kg}$ נזרק כלפי מעלה מגובה של $y_0 = 10m$ ומגיע לקרקע לאחר 2 שניות. כמו כן נתון כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל מהירות הכדור. לצורך הפשטות הניחו כי קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ הוא $g = 10$.

(א) מצאו את המהירות בה נזרק הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הארץ ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 10$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 2 \cdot 10 = 20$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-2g - \frac{1}{2}v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-2g - \frac{1}{2}v = ma = 2a$$

או $-2g - \frac{1}{2}y'(t) = 2y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונחלק ב 2 ונקבל

$$z' + \frac{1}{4}z = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = \frac{1}{4}, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\text{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = \frac{1}{4}x$ ונציב

$$e^{-\frac{1}{4}x}\left(C - \int ge^{\frac{1}{4}x}\text{dx}\right) = e^{-\frac{1}{4}x}\left(C - 4ge^{\frac{1}{4}x}\right) = e^{-\frac{1}{4}x}C - 4g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-\frac{1}{4}t}C - 4g$$

או

$$.y'(t) = e^{-\frac{1}{4}t}C - 4g$$

מכאן, ע"י אינטגרל פשוט, נקבל

$$.y(t) = -4e^{-\frac{1}{4}t}C - 4gt + D$$

כעת נציב נתוני השאלה. נתון כי $y(0) = 10$ ו $y(2) = 0$. נקבל את המשוואות

$$\begin{cases} 10 = y(0) = -4C + D \\ 0 = y(2) = -4e^{-\frac{1}{2}}C - 8g + D \end{cases}$$

ומהמשוואה הראשונה נקבל $D = 10 + 4C$. נציב במשוואה השניה

$$0 = -4e^{-\frac{1}{2}}C - 8g + D = -4e^{-\frac{1}{2}}C - 8g + 10 + 4C =$$

$$= \left(-4e^{-\frac{1}{2}} + 4\right)C - 70$$

לכן $C = \frac{70}{-4e^{-\frac{1}{2}}+4} = \frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}$ ו $D = 10 + 4C = 10 + 4\left(\frac{70}{-4e^{-\frac{1}{2}}+4}\right) = 10 + \frac{70}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$. נחזור ל y' ונציב את C שמצאנו

$$y'(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right) - 4g$$

ונקבל שהמהירות ההתחלתית היא

$$.y'(0) = \left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right) - 4g$$

(ב) מצאו את תאוצת הכדור ברגע הפגיעה בקרקע.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש

$$y'(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right) - 4g$$

ולכן פונקצית התאוצה היא

$$.y''(t) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right)$$

הכדור פוגע בקרקע לאחר 2 שניות ולכן התאוצה אז היא

$$y''(2) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{70}{4\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}\right)$$

מתמטיקה תשפג מועד א

20. מצאו פתרון למד"ר $2xyy' = y^2 - 1$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 2$.

פתרון: נחלק ב y^2-1, x לקבל:

$$\frac{2y}{y^2-1}y' = \frac{1}{x}$$

או בכתיב שקול

$$\frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy} = \frac{1}{x}\mathrm{dx}$$

שהינה מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו. נשתמש בשברים חלקים: קיימים A, B קבועים המקיימים

$$\frac{2y}{y^2-1} = \frac{2y}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}$$

נמצא אותם. נכפיל ב y^2-1 ונשווה: $2y = A(y+1) + B(y-1)$ הצבה של $y=1$ תתן $2 = 2A$ ולכן $A = 1$. הצבה של $y = -1$ תתן $-2 = -2B$ ולכן $B = 1$. מכאן ש

$$\int \frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy} = \int\left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1}\right)\mathrm{dy} = \ln|y-1| + \ln|y+1| = \ln\left|y^2-1\right|$$

ונוכל להמשיך מהשיוויון $\frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy} = \frac{1}{x}\mathrm{dx}$ לקבל:

$$\ln\left|y^2-1\right| = \ln|x| + C$$

ולכן

$$\left|y^2-1\right| = |x|\, e^C$$

$$y^2-1 = \pm x e^C$$

$$.y = \pm\sqrt{1 \pm x e^C}$$

נציב תנאי התחלה $y(1)=2$

$$2 = y(1) = \pm\sqrt{1 \pm e^C}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס (שלפני השורש) ובנוסף

$$4 = 1 \pm e^C$$

$$e^C = \pm 3$$

לכן צריך את הפלוס ולקבל ש $C=\ln(3)$. סה"כ הפתרון

$$.y = \sqrt{1 + x e^{\ln(3)}} = \sqrt{1+3x}$$

21. מסה של $m = 2\text{kg}$ מחוברת לקפיץ בעל קבוע קפיץ k על משטח חסר חיכוך. כמו כן נתון כי ברגע $t=0$ המסה הייתה ממוקמת כך שהקפיץ היה רפוי, אך מהירותה של המסה לא הייתה אפס. לבסוף, נתון כי הרגע הבא בו המסה חזרה למיקום בו הקפיץ רפוי הוא $t=\frac{\pi}{2}$.

(א) מצאו את קבוע הקפיץ k.

פתרון: נסמן מיקום המסה ביחס לנקודת הריפיון ב y. בפרט $y(0)=0$. הכיוון החיובי לכיוון המהירות ההתחלתית v_0 (ששונה מאפס). הכח הפועל על המסה הוא ky בכיוון המנוגד למיקום ולכן הכח הוא $-ky$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-ky = ma = 2a$$

או $-ky = 2y''$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). נעביר אגף ונחלק ב 2

$$y'' + \frac{k}{2}y = 0$$

ונקבל מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני שלה הוא

$$p(x) = x^2 + \frac{k}{2}$$

והשורשים של הפולינום הם $\pm i\sqrt{\frac{k}{2}} = \pm\sqrt{-\frac{k}{2}}$ ולכן

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right), \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

בסיס למרחב הפתרונות. לכן

$$y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

ונשתמש בנתוני השאלה $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$ למצוא את הקבועים c_i. מהנתון הראשון, נקבל

$$0 = y(0) = c_1$$

ולכן $y(x) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$ ונשתמש בנתון השני:

$$0 = y(\frac{\pi}{2}) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

לכן $c_2 = 0$ או $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$. לא ייתכן כי $c_2 = 0$ שהרי כי אז $y \equiv 0$ וגם הנגזרת $y' \equiv 0$ בפרט $y'(0) = 0$ בניגוד לנתון שהמהירות ההתחלתית שונה מאפס. לכן $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ולכן קיים N שלם כך ש $\sqrt{\frac{k}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = N\pi$ לכן $k = 8N^2$. כיוון ש $t = \frac{\pi}{2}$ הוא הזמן הראשון אחרי $t = 0$ שבו $y(t) = 0$ נסיק כי $N = 1$ (ואז $y(\frac{\pi}{2}) = c_2 \sin(\pi)$, אם $N > 1$ אזי היתה נקודה זמן לפני $\frac{\pi}{2}$ בה $y(t) = c_2 \sin(\pi)$ בסתירה לנתון). לכן

$$k = 8$$

ו

$$y(x) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{8}{2}}x\right) = c_2 \sin(2x)$$

כעת נגזור

$$y' = 2c_2 \cos(2x)$$

ומתקיים כי

$$v_0 = y'(0) = 2c_2$$

ולכן $c_2 = \frac{v_0}{2}$. מכאן ש

$$.y(x) = c_2 \sin(2x) = \frac{v_0}{2}\sin(2x)$$

(ב) מצאו את גודל מהירות המסה ברגע $t = 0$, אם ברגע $t = \frac{\pi}{4}$ המסה הייתה במרחק מטר אחד מנקודת הרפיון.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש $y(x) = \frac{v_0}{2}\sin(2x)$ ונתון ש

$$1 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0}{2}$$

ולכן

$$v_0 = 2$$

שזה המהירות ההתחלתית. הערה כיוון ש $\frac{\pi}{2}$ זה הזמן הראשון בו המסה חוזרת לנקודת הריפיון אז בזמן $\frac{\pi}{4}$ המסה נעה בכיוון המהירות ההתחלתית שהגדרנו אותה לכיוון החיובי ולכן $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ולא $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

מתמטיקה תשפג בוחן

22. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{y^2+e^x}{-2xy}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = -1$.

פתרון: נסדר את המד"ר מחדש:

$$-2xyy' = y^2 + e^x$$

$$0=\left(y^{2}+e^{x}\right)\mathrm{dx}+2xy\mathrm{dy}$$

ונגדיר

$$P\left(x,y\right)=y^{2}+e^{x}$$
$$.Q\left(x,y\right)=2xy$$

נשים לב כי

$$P_{y}=2y=Q_{x}$$

ולכן המד"ר מדויקת. נגדיר

$$F=\int\left(y^{2}+e^{x}\right)\mathrm{dx}+c(y)=xy^{2}+e^{x}+c(y)$$

כאשר נמצא $c(y)$ מהשיוויון $F_{y}=Q$.

$$F_{y}=2yx+c'(y)$$

$$Q=2xy$$

ושיויון בינהם: $2xy+c'(y)=2xy$. מכאן ש $c'=0$ ולכן נבחר $c(y)=0$. לכן

$$F(x,y)=xy^{2}+e^{x}$$

והפתרון נתון באופן סתום $F(x,y)=C$ או מפורשות

$$xy^{2}+e^{x}=C$$

ולכן

$$.y=\pm\sqrt{\frac{C-e^{x}}{x}}$$

נציב תנאי התחלה $y(1)=2$

$$2=y(1)=\pm\sqrt{\frac{C-e}{1}}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס (שלפני השורש) ובנוסף

$$4 = C - e$$

לכן צריך את הפלוס ולקבל ש $C = e + 4$. סה"כ הפתרון

$$.y = \sqrt{\frac{C - e^x}{x}} = \sqrt{\frac{e + 4 - e^x}{x}}$$

23. כדורגל בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נבעט כלפי מעלה במהירות התחלתית של v_0. הניחו כי כוח המשיכה הוא קבוע ושווה ל mg, כאשר g קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ. מצאו את v_0 אם נתון שהכדור הגיע חזרה לנקודה ממנה הוא נבעט לאחר שתי שניות , במקרים הבאים:

(א) בהנחה שאין כוחות נוספים פרט לכוח המשיכה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot g = g$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $-g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = v_0$ (מהירות התחלתית v_0 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$v_0 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt + v_0$. המיקום הוא

$$y = \int y' = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + D$$

ומהנתון $y(0) = 0$ נקבל $D = 0$. סה"כ

$$.y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

כעת נתון ש $y(2)=0$ ולכן

$$0=-g\frac{4}{2}+v_0 2=-2g+2v_0$$

ולכן $v_0=g$.

(ב) בהנחה שכוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לגודל המהירות של הכדור

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot g=g$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $-g-v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-v=ma=a$$

או $-g-y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+z=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=1, b(x)=-g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\text{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C-\int ge^{x}\text{dx}\right)=e^{-x}\left(C-ge^{x}\right)=e^{-x}C-g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-t}C-g$$

או

$$y'(t)=e^{-t}C-g.$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=v_0$ (מהירות התחלתית v_0 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$v_0=y'(0)=e^{-0}C-g=C-g$$

ומכאן $C = v_0 + g$. מכאן ש

$$y'(t) = e^{-t}(v_0+g) - g$$

ו

$$y = \int y = -e^{-t}(v_0+g) - gt + D.$$

מהנתון $y(0)=0$ נקבל $0 = -(v_0+g) + D$ ולכן $D = v_0 + g$. סה"כ

$$\begin{aligned} y(t) &= -e^{-t}(v_0+g) - gt + (v_0+g). \\ &= \left(1-e^{-t}\right)(v_0+g) - gt \end{aligned}$$

כעת נתון ש $y(2)=0$ ולכן

$$0 = \left(1-e^{-2}\right)(v_0+g) - 2g = \left(1-e^{-2}\right)v_0 - \left(1+e^{-2}\right)g$$

ולכן $v_0 = \frac{\left(1+e^{-2}\right)g}{\left(1-e^{-2}\right)}$.

מתמטיקה תשפב מועד ב

22. מצאו פתרון למד"ר $y' = 2x + 2xy^2$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=0$.

פתרון: נסדר

$$y' = 2x\left(1+y^2\right)$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 2x$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{1+y^2} = 2x\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$\arctan(y) = x^2 + C$$

לכן

$$y = \tan\left(x^2+C\right).$$

נציב תנאי התחלה

$$0 = y(0) = \tan(0 + C)$$

לכן $C = \arctan(0) = 0$. התשובה הסופית היא

$$.y(x) = \tan\left(x^2\right)$$

23. מצאו פתרון למד"ר $x^2 e^{xy} y' = x\sin(2x) - xye^{xy}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(\pi) = 0$.

פתרון: נגדיר $z = xy$ ואז $z' = y + xy'$. נציב במד"ר שלנו $z = xy, y' = \frac{z'-y}{x} = \frac{z'-\frac{z}{x}}{x} = \frac{z'x-z}{x^2}$:

$$x^2 e^{xy} y' = x\sin(2x) - xye^{xy}$$

$$x^2 e^z \left(\frac{z'x - z}{x^2}\right) = x\sin(2x) - ze^z$$

$$e^z z'x - e^z z = x\sin(2x) - ze^z$$

$$e^z z' = \sin(2x)$$

או בכתיב שקול

$$e^z \mathrm{dz} = \sin(2x)\mathrm{dx}$$

שהינה מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים,

$$e^z = -\frac{\cos(2x)}{2} + c$$

ולכן $z = \ln\left(-\frac{\cos(2x)}{2} + C\right)$. נחזור ל $y = \frac{z}{x}$ לקבל

$$.y(x) = \frac{\ln\left(-\frac{\cos(2x)}{2} + C\right)}{x}$$

נ נציב תנאי התחלה $y(\pi) = 0$

$$0 = y(\pi) = \frac{\ln\left(-\frac{\cos(2\pi)}{2} + C\right)}{\pi} = \frac{\ln\left(-\frac{1}{2} + C\right)}{\pi}$$

לכן $\ln\left(-\frac{1}{2} + C\right) = 0$ ואז $-\frac{1}{2} + C = 1$ ומכאן ש $C = \frac{3}{2}$. סה"כ הפתרון

$$.y = \frac{\ln\left(-\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{2}\right)}{x}$$

24. מצאו פתרון למד"ר $(1-x)\,y'' + xy' - y = 0$ המקיים $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ואז

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\,(k-1)\,x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$(1-x)\,y'' + xy' - y = y'' - xy'' + xy' - y =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\,(k-1)\,x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\,(k-1)\,x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1)\,x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\,(k+1)\,k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= a_2 \cdot 2 \cdot 1 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1) - a_{k+1}\,(k+1)\,k + a_k k - a_k\right] x^k$$

ולכן $2a_2 - a_0 = 0$ ולכל $k \geq 1$ מתקיים

$$a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1) - a_{k+1}\,(k+1)\,k + a_k k - a_k = 0$$

$$a_{k+2}=\frac{(1-k)\,a_k+k\,(k+1)\,a_{k+1}}{(k+1)\,(k+2)}$$

נוכל לבחור a_0,a_1 כרצוננו ואז:

$$a_2=\frac{a_0}{2}$$

$$a_3=\frac{2a_2}{3!}=\frac{a_0}{3!}$$

$$a_4=\frac{-a_2+3!a_3}{3\cdot 4}=\frac{-\frac{a_0}{2}+3!\frac{a_0}{3!}}{3\cdot 4}=\frac{a_0}{4!}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה כי $a_k=\frac{a_0}{k!}$ לכל $k\geq 2$.

כעת נבחר $a_1=\frac{a_0}{1!}$ ונקבל כי

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_0\frac{1}{k!}x^k=a_0e^x$$

ונבחר $a_0=1$ לקבל כי $y_1(x)=e^x$ פתרון למד"ר שלנו. נייצר פתרון נוסף: נבחר $a_0=0$ (מה שגורר כי $a_k=0$ לכל $k\geq 2$) ו $a_1=1$ ונקבל את הפתרון $y_2(x)=x$. נוכיח כי y_1,y_2 בת"ל ע"י שנראה שהורונסקיאן שונה מאפס. אכן

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} e^x & x\\ e^x & 1\end{pmatrix}=e^x\,(1-x)$$

שונה מאפס בסביבה של 0 (ששמה תנאי ההתחלה). מכאן נסיק שהפתרון הכללי הוא

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^x+c_2x$$

ונציב תנאי התחלה

$$1=y(0)=c_1$$

$$2=y'(0)=c_1+c_2$$

לכן $c_1=c_2=1$ והפתרון לתרגיל הוא $y(x)=e^x+x$.

25. חפץ בעל מסה של $m=1\mathrm{kg}$ מחובר לקפיץ עם קבוע קפיץ $k=1$ על משטח ללא חיכוך, אורך הקפיץ במצב רפוי הוא מטר אחד.

(א) נניח שבזמן $t=0$ ממקמים את החפץ כך שהקפיץ יהיה באורך מטר וחצי, ומשחררים את החפץ במצב מנוחה. מה יהיה אורך הקפיץ בזמן $t=0$?

פתרון: נסמן מיקום המסה ביחס לנקודת הריפיון ב y והמיקום ההתחלתי הוא בכיוון החיובי. בפרט $y(0)=\frac{1}{2}$. הכח הפועל על המסה הוא ky בכיוון המנוגד למיקום ולכן הכח הוא $-ky$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-ky=ma=a$$

או $-ky=y''$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). נציב $k=1$ לפי הנתונים ונקבל

$$y''+y=0$$

שהיא מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני שלה הוא

$$p(x)=x^2+1$$

והשורשים של הפולינום הם $\pm i$ ולכן

$$\cos(x)\,,\sin(x)$$

בסיס למרחב הפתרונות. לכן

$$y(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$$

הוא פתרון כללי. נשתמש $y(0)=\frac{1}{2}$. מתקיים

$$\frac{1}{2}=y(0)=c_1$$

ולכן $y(x)=\frac{1}{2}\cos(x)+c_2\sin(x)$. כיוון שמשחררים את החפץ במצב מנוחה, $y'(0)=0$.

$$y'(x)=-\frac{1}{2}\sin(x)+c_2\cos(x)$$

$$0=y'(0)=c_2$$

ולכן $y(x)=\frac{1}{2}\cos(x)$. בזמן $t=2$ אורך הקפיץ יהיה

$$1+y(2)=1+\frac{1}{2}\cos(x)$$

שהרי $y(x)$ הוא מיקום החפץ (או אורך הקפיץ) ביחס לנקודת הריפיון שנמצאת ב 1.

(ב) נניח שבזמן $t=0$ אורך הקפיץ הוא בדיוק מטר אחד, ובזמן $t=\frac{\pi}{2}$ אורך הקפיץ הוא מטר וחצי. מה הייתה מהירות החפץ בזמן $t=0$ ובאיזה כיוון היא הייתה? (הכיוון בו הקפיץ נמתח, או הכיוון בו הקפיץ מתכווץ.)

פתרון: ראינו בסעיף קודם כי

$$y(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$$

הוא פתרון כללי. נשתמש בנתון של השאלה כי $y(0)=0$. מתקיים

$$0=y(0)=c_1$$

ולכן $y(x)=c_2\sin(x)$. נתון עוד כי $y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$ (נסמן את הכיוון החיובי בכיוון שהקפיץ מתוח בזמן $t=\frac{\pi}{2}$). נציב

$$\frac{1}{2}=y(\frac{\pi}{2})=c_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_2$$

ולכן $y(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$ מתאר את מיקום החפץ. נגזור, לקבל את פונקצית המהירות ואז נציב 0 לקבל את המהירות ההתחלתית

$$y'(x)=\frac{1}{2}\cos(x)$$

$$y'(0)=\frac{1}{2}$$

ולכן המהירות ההתחלתית היא $\frac{1}{2}$ בכיוון שהקפיץ נמתח (שהרי $y'(0)>0$).

מתמטיקה תשפב מועד א

26. מצאו פתרון למד"ר $(x-1)\,y'=y$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$.

פתרון: נסדר

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{y}=\frac{\mathrm{dx}}{x-1}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$\ln|y| = \ln|x-1| + C$$

לכן $|y| = |x-1|\,e^C$ ואז

$$y = \pm(x-1)\,e^C.$$

נציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = \pm(-1)\,e^C$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם המינוס ו $C=0$. התשובה הסופית היא

$$y(x) = -(x-1).$$

27. מצאו פתרון למד"ר $\frac{y}{x}y' = -1$ המקיים את תנאי ההתחלה $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

פתרון: נסדר

$$yy' = -x$$

$$y\mathrm{dy} = -x\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לכן $y^2 = -x^2 + C$ ואז

$$y = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

נציב תנאי התחלה

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\sqrt{C - \frac{1}{2}}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם המינוס ו $\frac{1}{2} = C - \frac{1}{2}$. לכן $C = 1$ והתשובה הסופית היא

$$y(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

28. חפץ בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נעזב במהירות אפס ונופל לעבר הרצפה. נניח כי קבוע הכבידה הוא $g = 9.8m/s^2$.

(א) נניח שאין התנגדות אוויר, והכוח היחיד שפועל על החפץ הוא כוח המשיכה mg. מאיזה גובה עלינו להפיל את החפץ כך שיפגע ברצפה לאחר 3 שניות?

פתרון: נסמן את הרצפה ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט רוצים למצוא את $y(0)$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot g = g$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $-g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt$. המיקום הוא

$$y = \int y' = -g\frac{t^2}{2} + D$$

רוצים ש $y(3) = 0$ לכן

$$0 = -g\frac{3^2}{2} + D$$

ומכאן ש $D = \frac{9}{2}g$. לכן $y(t) = -g\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2}g$ והמיקום ההתחלתי הוא $y(0) = \frac{9}{2}g$.

(ב) נניח שהתנגדות האוויר היא bv כאשר $b = 0.05$ ו v היא מהירות הנפילה במטר לשנייה. מאיזה גובה עלינו להפיל את החפץ כך שיפגע ברצפה לאחר 3 שניות?

פתרון: נסמן את הרצפה ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט רוצים למצוא את $y(0)$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot g = g$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל bv וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-bv$. לכן הכח הכולל הוא $-g - bv$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g - bv = ma = a$$

או $-g - by'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + bz = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = b, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = bx$ ונציב

$$e^{-bx}\left(C - \int ge^{bx}\mathrm{dx}\right) = e^{-bx}\left(C - \frac{g}{b}e^{bx}\right) = e^{-bx}C - \frac{g}{b}$$

לכן:

$$z(t) = e^{-bt}C - \frac{g}{b}$$

או

$$.y'(t) = e^{-bt}C - \frac{g}{b}$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = e^{-b\cdot 0}C - \frac{g}{b} = C - \frac{g}{b}$$

ומכאן $C = \frac{g}{b}$. מכאן ש

$$y'(t) = \frac{g}{b}e^{-bt} - \frac{g}{b}$$

ו

$$.y = \int y = -\frac{g}{b^2}e^{-bt} - \frac{g}{b}t + D$$

רוצים ש $y(3)=0$ לכן

$$0=-\frac{g}{b^2}e^{-3b}-3\frac{g}{b}+D$$

ומכאן ש $D=\frac{g}{b^2}e^{-3b}+3\frac{g}{b}$. לכן $y(t)=-\frac{g}{b^2}e^{-bt}-\frac{g}{b}t+\left(\frac{g}{b^2}e^{-3b}+3\frac{g}{b}\right)$ והמיקום ההתחלתי הוא

$$y(0)=-\frac{g}{b^2}+\frac{g}{b^2}e^{-3b}+3\frac{g}{b}.$$

מתמטיקה תשפא מועד ב

29. מצאו פתרון למד"ר $3y'=y$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$.

פתרון: נסדר

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{y}=\frac{1}{3}\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$\ln|y|=\frac{1}{3}x+C$$

לכן $|y|=e^{\frac{1}{3}x}\cdot e^C$ ולכן

$$y=\pm e^{\frac{1}{3}x}\cdot e^C.$$

נציב תנאי התחלה

$$1=y(0)=\pm e^C$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס ו $C=0$. התשובה הסופית היא

$$y(x)=e^{\frac{1}{3}x}\cdot e^0=e^{\frac{1}{3}x}.$$

30. מצאו פתרון למד"ר $\frac{y^2}{(1+x)^2}=\frac{2yy'}{1+x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=-1$.

פתרון: נחלק ב y^2 ונכפיל ב $(1+x)$

$$\frac{2y'}{y}=\frac{1}{(1+x)}$$

$$\frac{2\mathrm{dy}}{y}=\frac{\mathrm{dx}}{(1+x)}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$2\ln|y|=\ln|1+x|+C$$

לכן $|y|^2=|1+x|\cdot e^C$ ולכן

$$.y=\pm\sqrt{|1+x|\cdot e^C}$$

נציב תנאי התחלה

$$-1=y(0)=\pm\sqrt{|1|\cdot e^C}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם המינוס לפני השורש ואז $1=e^C$. קיבלנו ש $C=0$ והתשובה הסופית היא

$$.y=-\sqrt{|1+x|}$$

31. מצאו פתרון למד"ר $y''-4y'+4y=(e^x-1)(e^x+1)$ המקיים $y(0)=y'(0)=0$.

פתרון: נתחיל עם המד"ר ההומוגנית

$$y''-4y'+4y=0$$

שהפולינום האופייני שלה $p(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$. לכן 2 שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2. לכן $y_1=e^{2x},y_2=xe^{2x}$ פתרונות למד"ר הלינארית ההומגנית לעיל. מכיוון שהיא מסדר 2 הם בסיס למרחב הפתרונות שלה. לכן הפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=d_1y_1+d_2y_2=d_1e^{2x}+d_2xe^{2x}=e^{2x}(d_1+d_2x)$$

וכעת נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית עם שיטת הניחוש. נפצל את $(e^x-1)(e^x+1)=e^{2x}-1$ ונחפש שני פתרונות פרטי

y_{p_1}, y_{p_2} למדרים:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \qquad y'' - 4y' + 4y = -1$$

ואז $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ יהיה פתרון פרטי למד"ר שלנו.

עבור $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ ננחש

$$y_{p_1} = \alpha x^2 e^{2x}$$

שהרי 2 הוא שורש מריבוי 2. מתקיים

$$y'_{p_1} = \alpha\left(2x + 2x^2\right)e^{2x}$$
$$y''_{p_1} = \alpha\left(2\left(2x + 2x^2\right) + 2 + 4x\right)e^{2x} = \alpha\left(1 + 4x + 2x^2\right)2e^{2x}$$

נציב במשוואה

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

$$\left(1 + 4x + 2x^2\right)2\alpha e^{2x} - 4\alpha\left(2x + 2x^2\right)e^{2x} + 4\alpha x^2 e^{2x} = e^{2x}$$

נצמצם ב e^{2x}:

$$2\alpha\left(1 + 4x + 2x^2\right) - 4\alpha\left(2x + 2x^2\right) + 4\alpha x^2 = 1$$

$$2\alpha = 1$$

לכן $\alpha = \frac{1}{2}$ ו $y_{p_1} = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$.

עבור $y'' - 4y' + 4y = -1$ ננחש $y_{p_2} = \alpha$ קבוע ואז מהמשוואה נקבל כי

$$4\alpha = -1$$

ולכן $\alpha = -\frac{1}{4}$ ו $y_{p_2} = -\frac{1}{4}$.

קיבלנו ש

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{4}$$

יהיה פתרון פרטי למד"ר שלנו. לכן הפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית שלנו הוא

$$y = y_h + y_p = e^{2x}\left(d_1 + d_2 x\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{4}$$

ונציב תנאי התחלה למציאת הקבועים.

$$0 = y(0) = d_1 - \frac{1}{4}$$

לכן $d_1 = \frac{1}{4}$. בנוסף

$$y' = e^{2x}\left[2\left(d_1 + d_2 x\right) + d_2\right] + \left[x + x^2\right] e^{2x}$$

ונציב תנאי התחלה

$$0 = y'(0) = 2d_1 + d_2$$

ולכן $d_2 = -2d_1 = -\frac{1}{2}$. סה"כ הפתרון הוא

$$y = e^{2x}\left(d_1 + d_2 x\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{4} =$$

$$e^{2x}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{4} == e^{2x}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{4}$$

32. מצאו פתרון למד"ר $y = xy' - (x-1)\,y''$ המקיים $y(0) = 1$ וכן $y'(0) = 1$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ואז

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$\left(1-x\right) y'' + xy' - y = y'' - xy'' + xy' - y =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1) x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} (k+1) k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= a_2 \cdot 2 \cdot 1 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k+2} (k+2)(k+1) - a_{k+1} (k+1) k + a_k k - a_k \right] x^k$$

ולכן $2a_2 - a_0 = 0$ ולכל $k \geq 1$ מתקיים

$$a_{k+2} (k+2)(k+1) - a_{k+1} (k+1) k + a_k k - a_k = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{(1-k) a_k + k (k+1) a_{k+1}}{(k+1)(k+2)}$$

נוכל לבחור a_0, a_1 כרצוננו ואז:

$$a_2 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{3!} = \frac{a_0}{3!}$$

$$a_4 = \frac{-a_2 + 3! a_3}{3 \cdot 4} = \frac{-\frac{a_0}{2} + 3! \frac{a_0}{3!}}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה כי $a_k = \frac{a_0}{k!}$ לכל $k \geq 2$.

כעת נבחר $a_1 = \frac{a_0}{1!}$ ונקבל כי

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{1}{k!} x^k = a_0 e^x$$

ונבחר $a_0 = 1$ לקבל כי $y_1(x) = e^x$ פתרון למד"ר שלנו. נייצר פתרון נוסף: נבחר $a_0 = 0$ (מה שגורר כי $a_k = 0$ לכל $k \geq 2$) ו $a_1 = 1$ ונקבל את הפתרון $y_2(x) = x$. נוכיח כי y_1, y_2 בת"ל ע"י שנראה שהורונסקיאן שונה מאפס. אכן

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} = e^x (1-x)$$

שונה מאפס בסביבה של 0 (ששמה תנאי ההתחלה). מכאן נסיק שהפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x$$

ונציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = c_1$$

$$1 = y'(0) = c_1 + c_2$$

לכן $c_1 = 1, c_2 = 0$ והפתרון לתרגיל הוא $y(x) = e^x$.

33. מצאו פתרון למד"ר $xy' - (x-1)\,y'' = y$ המקיים $y(3) = 3$ וכן $y'(0) = 1$.

פתרון: ראינו ממקודם כי $y_1 = e^x, y_2 = x$ פותרים את המד"ר, ללא תנאי התחלה. נציג פתרון כ

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x$$

ונציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = c_1$$

$$3 = y'(3) = c_1 e^3 + c_2$$

לכן $c_1 = 1$ ו $c_2 = 3 - c_1 e^3 = 3 - e^3$ ופתרון לתרגיל הוא $y(x) = e^x + \left(3 - e^3\right) x$.

מתמטיקה תשפא מועד א

34. מצאו פתרון למד"ר $y' + y = x$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 0$.

פתרון: זוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = 1, b(x) = x$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נבחר $A(x)=x$ ונציב:

$$y=e^{-x}\left(C+\int xe^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}C+e^{-x}\int xe^{x}\mathrm{dx}.$$

נחשב $\int xe^{x}\mathrm{dx}$ בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\int xe^{x}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{ccc} f=x & \Rightarrow & f'=1 \\ g'=e^{x} & & g=e^{x}\end{array}\right\}=xe^{x}-\int e^{x}\mathrm{dx}=e^{x}\left(x-1\right)$$

ולכן

$$y=e^{-x}C-e^{-x}\int xe^{x}\mathrm{dx}=e^{-x}C+(x-1)$$

ונציב תנאי התחלה $y(0)=0$ למצוא את הקבוע C.

$$0=y(0)=C-1$$

לכן $C=1$ והפתרון הוא

$$y(x)=e^{-x}+x-1.$$

35. מצאו פתרון למד"ר $xy'=x^{2}e^{-y}+\frac{x+1}{e^{y}}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נסדר:

$$xy'=x^{2}e^{-y}+\frac{x+1}{e^{y}}$$

$$xy'=\frac{x^{2}}{e^{y}}+\frac{x+1}{e^{y}}=\frac{x^{2}+x+1}{e^{y}}$$

$$e^{y}y'=x+1+\frac{1}{x}$$

$$e^{y}\mathrm{dy}=\left(x+1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^y = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C$$

לכן

$$.y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C\right)$$

נציב תנאי התחלה

$$0 = y(1) = \ln\left(\frac{1}{2} + 1 + 0 + C\right)$$

לכן $\frac{1}{2} + 1 + C = 1$ ו $C = -\frac{1}{2}$ והתשובה הסופית היא

$$.y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{1}{2}\right)$$

36. מצאו פתרון למד"ר $xy' - (x-1)\,y'' = y$ המקיים $y(0) = 1$ וכן $.y'(0) = 0$

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ואז

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\,(k-1)\,x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$(1-x)\,y'' + xy' - y = y'' - xy'' + xy' - y =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\,(k-1)\,x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\,(k-1)\,x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}(k+1)kx^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= a_2 \cdot 2 \cdot 1 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_{k+1}(k+1)k + a_k k - a_k\right] x^k$$

ולכן $2a_2 - a_0 = 0$ ולכל $k \geq 1$ מתקיים

$$a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_{k+1}(k+1)k + a_k k - a_k = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{(1-k)a_k + k(k+1)a_{k+1}}{(k+1)(k+2)}$$

נוכל לבחור a_0, a_1 כרצוננו ואז:

$$a_2 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{3!} = \frac{a_0}{3!}$$

$$a_4 = \frac{-a_2 + 3!a_3}{3 \cdot 4} = \frac{-\frac{a_0}{2} + 3!\frac{a_0}{3!}}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה כי $a_k = \frac{a_0}{k!}$ לכל $k \geq 2$.

כעת נבחר $a_1 = \frac{a_0}{1!}$ ונקבל כי

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{1}{k!} x^k = a_0 e^x$$

ונבחר $a_0 = 1$ לקבל כי $y_1(x) = e^x$ פתרון למד"ר שלנו. נייצר פתרון נוסף: נבחר $a_0 = 0$ (מה שגורר כי $a_k = 0$ לכל $k \geq 2$) ו $a_1 = 1$ ונקבל את הפתרון $y_2(x) = x$. נוכיח כי y_1, y_2 בת"ל ע"י שנראה שהורונסקיאן שונה מאפס. אכן

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} = e^x(1-x)$$

שונה מאפס בסביבה של 0 (ששמה תנאי ההתחלה). מכאן נסיק שהפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x$$

ונציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = c_1$$

$$0 = y'(0) = c_1 + c_2$$

לכן $c_1 = 1, c_2 = -1$ והפתרון לתרגיל הוא $y(x) = e^x - x$.

מתמטיקה תשעט מועד ב

37. מצאו פתרון למד"ר $y' = 2x - 2xy$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 2$.

פתרון: נסדר

$$y' = 2x - 2xy = 2x\left(1 - y\right)$$

$$\frac{y'}{1-y} = 2x$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{1-y} = 2x\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$-\ln|1-y| = x^2 + C$$

לכן $|1-y| = e^{\left(-x^2\right)} \cdot e^C$ ולכן $1 - y = \pm e^{\left(-x^2\right)} \cdot e^C$ ולכן

$1 \mp e^{\left(-x^2\right)} \cdot e^C = y$.

נציב תנאי התחלה

$$2 = y(0) = 1 \mp \cdot e^C$$

$$\pm e^C = -1$$

לכן צריך לקחת את המינוס (שמתאים לפתרון עם הפלוס) $C = 0$. התשובה הסופית היא

$y(x) = 1 + e^{\left(-x^2\right)} \cdot e^C = 1 + e^{\left(-x^2\right)}$.

38. מצאו פתרון למד"ר $y''+2y'+y=\frac{1}{e^x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=0, y'(0)=1$.

פתרון: נתחיל עם המד"ר ההומגנית

$$y''+2y'+y=0$$

שהפולינום האופיני שלה $p(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$. לכן -1 שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2. לכן $y_1=e^{-x}, y_2=xe^{-x}$ פתרונות למד"ר הלינארית ההומגנית לעיל. מכיוון שהיא מסדר 2 הם בסיס למרחב הפתרונות שלה. לכן הפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=d_1y_1+d_2y_2=d_1e^{-x}+d_2xe^{-x}=e^{-x}\left(d_1+d_2x\right)$$

וכעת נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית עם שיטת הניחוש. המד"ר שלנו הוא $y''+2y'+y=e^{-x}$ ולכן ננחש

$$y_p=\alpha x^2e^{-x}$$

שהרי -1 הוא שורש מריבוי 2. מתקיים

$$\begin{aligned} y_{p_1}' &= \alpha\left(-x^2+2x\right)e^{-x} \\ y_{p_1}'' &= \alpha\left(x^2-2x-2x+2\right)e^{-x}=\alpha\left(x^2-4x+2\right)e^{-x} \end{aligned}$$

נציב במשוואה

$$y''+2y'+y=e^{-x}$$

$$\alpha\left(x^2-4x+2\right)e^{-x}+2\alpha\left(-x^2+2x\right)e^{-x}+\alpha x^2e^{-x}=e^{-x}$$

נצמצם ב e^{-x}:

$$\alpha\left(x^2-4x+2\right)+2\alpha\left(-x^2+2x\right)+\alpha x^2=1$$

$$2\alpha=1$$

לכן $\alpha = \frac{1}{2}$ ו $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ יהיה פתרון פרטי למד"ר שלנו. לכן הפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית שלנו הוא

$$y = y_h + y_p = e^{-x}\left(d_1 + d_2x\right) + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

ונציב תנאי התחלה למציאת הקבועים. מהנתאי הראשון נקבל

$$0 = y(0) = d_1$$

ובנוסף:

$$y' = e^{-x}\left(-d_2x + d_2\right) + \frac{1}{2}\left(-x^2 + 2x\right)e^{-x}$$

ונציב את תנאי התחלה השני

$$1 = y'(0) = d_2$$

ולכן הפתרון הוא

$$.y = xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

39. מצאו פתרון למד"ר $xy'' - (1+x)\,y' + 2y = 0$ המקיים $y(0) = 0$ וכן $.y(1) = 1$

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

ואז

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_kkx^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$xy'' - (1+x)\,y' + 2y = xy'' - y' - xy' + 2y$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\left(k+1\right) k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\left(k+1\right) x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= -a_1 + 2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k+1}\left(k+1\right)k - a_{k+1}\left(k+1\right) - a_k k + 2a_k\right] x^k$$

ומשווים לאפס. לכן $-a_1 + 2a_0 = 0$ ‏($a_1 = 2a_0$) ולכל $k \geq 1$ מתקיים

$$a_{k+1}\left(k+1\right)k - a_{k+1}\left(k+1\right) - a_k k + 2a_k = 0$$

$$a_{k+1}\left(k+1\right)\left(k-1\right) - a_k(k-2) = 0$$

ועבור $k = 1$ נקבל $a_1 = 0$ (ולכן גם $a_0 = 0$) ולכל $k \geq 2$ נקבל

$$a_{k+1} = \frac{a_k(k-2)}{\left(k+1\right)\left(k-1\right)}$$

כלומר, $a_0 = a_1 = 0$, את a_2 נוכל לבחור כרצוננו ולכל $k \geq 2$ מתקיים

$$a_{k+1} = \frac{a_k(k-2)}{\left(k+1\right)\left(k-1\right)}$$

מה שמכריח את $a_3 = 0$ (בהצבה $k = 2$) וכן את כל הבאים אחריו. נבחר $a_2 = 1$ נקבל את הפתרון $y(x) = x^2$. בנוסף $y(x) = x^2$ מקיים $y(0) = 0, y(1) = 1$ ולכן הוא הפתרון לתרגיל.

40. מצאו פתרון למד"ר $y'' - \left(1+x\right)y' + xy = 0$ המקיים $y(0) = y'(0) = 1$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ואז

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$y'' - (1+x)\,y' + 2y = xy'' - y' - xy' + xy$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\,(k-1)\,x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1)\,x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\,(k+1)\,x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k =$$

$$= 2a_2 - a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1) - a_{k+1}\,(k+1) - a_k k + a_{k-1}\right] x^k$$

ומשווים לאפס. לכן $2a_2 - a_1 = 0$ (או $a_2 = \frac{1}{2}a_1$) ולכל $k \geq 1$ מתקיים

$$a_{k+2}\,(k+2)\,(k+1) - a_{k+1}\,(k+1) - a_k k + a_{k-1} = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{(k+1)\,a_{k+1} + ka_k - a_{k-1}}{(k+2)\,(k+1)}$$

ונציב כמה k ים.

$$a_3 = \frac{2a_2 + 1 \cdot a_1 - a_0}{3 \cdot 2} = \frac{2a_1 - a_0}{3 \cdot 2}$$

$$a_4 = \frac{3a_3 + 2 \cdot a_2 - a_1}{4 \cdot 3} = \frac{3a_3}{4 \cdot 3} = \frac{2a_1 - a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

ורואים ש a_0, a_1 לבחירתנו וכל שאר a_k יקבעו לפי השיוויון

$$a_{k+2} = \frac{(k+1)\,a_{k+1} + ka_k - a_{k-1}}{(k+2)\,(k+1)}$$

(לכל $k \geq 1$). נבחר $a_0 = a_1$ ונקבל (a_1 עדיין לבחירתנו)

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_3 = \frac{2a_1 - a_0}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{3!}$$

$$a_4 = \frac{2a_1 - a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_1}{4!}$$

$$a_5 = \frac{4a_4 + 3a_3 - a_2}{5 \cdot 4} = \frac{4 \cdot \frac{a_1}{4!} + 3 \cdot \frac{a_1}{3!} - \frac{1}{2}a_1}{5 \cdot 4} =$$

$$= \frac{\frac{a_1}{3!} + \frac{a_1}{2!} - \frac{a_1}{2}}{5 \cdot 4} == \frac{a_1 + 3a_1 - 3a_1}{5!} = \frac{a_1}{5!}$$

וניתן להוכיח כי $a_k = \frac{a_1}{k!}$ לכל $k \geq 1$. נחבר $a_1 = 1$ ונקבל את הפתרון

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

שמקיים $y(0) = y'(0) = 1$ ולכן הוא פתרון לשאלה.

הנדסה מד"ר תשעח מועד ב

41. מצאו פתרון למד"ר $y' = y + \frac{1}{x}(1-y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 2$.

פתרון: נסדר

$$y' = y + \frac{1}{x}(1-y)$$

$$y' = y\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$$

$$y' + y\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$$

וקיבלנו מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = \frac{1}{x} - 1, b(x) = \frac{1}{x}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. למשל נבחר $A(x)=\ln(x)-x$ (בלי ערך מוחלט כי מחפשים פתרון סביב $x=1$ שהוא חיובי) ואז

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x-\ln(x)}\left(C+\int \frac{1}{x}e^{\ln(x)-x}\mathrm{dx}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}\left(C+\int \frac{1}{x}xe^{-x}\mathrm{dx}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}\left(C-e^{-x}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}C-\frac{1}{x} \end{aligned}$$

ונציב תנאי התחלה.

$$2=y(1)=e\cdot C-1$$

לכן $C=\frac{3}{e}$. התשובה הסופית היא

$$.y(x)=\frac{3}{e}\cdot\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$$

42. מצאו פתרון למד"ר $\frac{x^2+e^x}{2x+e^x}y'=-y$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$.

פתרון: נסדר

$$\frac{x^2+e^x}{2x+e^x}y'=-y$$

$$\frac{y'}{-y}=\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{-y}=\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו.

$$-\ln|y|=\int\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\mathrm{dx}=\ln\left(x^2+e^x\right)+C$$

ולכן $\left(x^{2}+e^{x}\right)e^{C}=\frac{1}{|y|}$ ולכן $|y|=\frac{1}{(x^{2}+e^{x})e^{C}}$ ולכן

$$y=\pm\frac{1}{\left(x^{2}+e^{x}\right)e^{C}}.$$

נציב תנאי התחלה

$$1=y(0)=\pm\frac{1}{e^{C}}$$

ונגלה שצריך לקחת את הפתרון עם הפלוס. ומכאן ש $\frac{1}{e^{C}}=1$ ולכן $C=0$. סה"כ הפתרון לתרגיל

$$y=\frac{1}{x^{2}+e^{x}}.$$

43. מצאו פתרון למד"ר $y''=2x\left(y'\right)^{2}$ המקיים $y(0)=0, y'(0)=-1$.

פתרון: נציב $z=y'$ ונסדר

$$z'=2xz^{2}$$

$$\frac{z'}{z^{2}}=2x$$

$$\frac{\mathrm{dz}}{z^{2}}=2x\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו.

$$-\frac{1}{z}=x^{2}+C$$

ולכן $y'=z=-\frac{1}{x^{2}+C}$. נציב תנאי התחלה

$$-1=y'(0)=-\frac{1}{C}$$

מכאן ש $C=1$ ונקבל ש

$$y'=-\frac{1}{x^{2}+1}.$$

לכן

$$y=\int z=-\arctan(x)+D$$

ונציב את תנאי ההתחלה השני

$$0=y(0)=D$$

לכן התשובה הסופית היא

$$.y(x)=-\arctan(x)$$

44. מצאו פתרון למד"ר $y''=y+e^{x}$ המקיים $.y(0)=0,y'(0)=0$

פתרון: זה המד"ר

$$y''-y=e^{x}$$

ונתחיל עם המד"ר ההומגנית המתאימה $.y''-y=0$ הפולינום האופייני שלה הוא

$$p(x)=x^{2}-1=(x-1)(x+1)$$

ולכן e^{-x},e^{x} פתרונות למד"ר ההומגנית. כיוון שזוהי מד"ר מסדר שני, הם מהווים בסיס למרחב הפתרונות שלה. לכן הפתרון הכללי להומגנית הוא

$$y_{h}=d_{1}e^{-x}+d_{2}e^{x}$$

וכעת נמצא פתרון פרטי y_p למד"ר הלא הומגנית ואז הפתרון הכללי ללא הומגנית יהיה $.y=y_{p}+y_{h}$ כיוון שמשווים ל e^{x} ו 1 הוא שורש של הפולינום האופיני של ההומגנית, ננחש פתרון $.y_{p}=\alpha xe^{x}$ ואז

$$y_{p}'=\alpha\left(x+1\right)e^{x}$$
$$y_{p}''=\alpha\left(x+2\right)e^{x}$$

ונציב ב $.y''-y=e^{x}$

$$y''-y=e^{x}$$

$$\alpha\left(x+2\right)e^{x}-\alpha xe^{x}=e^{x}$$

נצמצם e^x לקבל $\alpha\left(x+2\right)-\alpha x=1$ לכן $2\alpha=1$ ו $\alpha=\frac{1}{2}$. לכן

$$y_p=\frac{1}{2}xe^{x}$$

פתרון פרטי ללא הומגנית והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y=y_p+y_h=\frac{1}{2}xe^{x}+d_1e^{-x}+d_2e^{x}$$

והנגזרת

$$y'=\frac{1}{2}\left(x+1\right)e^{x}-d_1e^{-x}+d_2e^{x}$$

ונציב את הנתונים $y(0)=0,y'(0)=0$ למצוא את הקבועים:

$$0=y(0)=d_1+d_2$$
$$0=y'(0)=\frac{1}{2}-d_1+d_2$$

מהמשוואה הראשונה $d_1=-d_2$ ואז נציב במשוואה השניה לקבל $\frac{1}{2}+d_2+d_2=0$ ואז $d_2=-\frac{1}{4}$. מכאן ש $d_1=-d_2=\frac{1}{4}$ והפתרון לתרגיל שלנו הוא

$$.y=\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{x}$$

45. ידוע כי קיים פתרון למד"ר $x^2y''=\left(x^2-2x+2\right)y+x-2$ מהצורה $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. עבור פתרון זה:

(א) מצאו את $y(0),y'(0)$.

פתרון: נציג את המד"ר כ

$$x^2y''-\left(x^2-2x+2\right)y=x-2$$

ונסמן פתרון y כטור טיילור

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

ואז

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$x^2y'' - \left(x^2 - 2x + 2\right) y = x^2y'' - x^2y + 2xy - 2y$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^k - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_{k-1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k =$$

$$= \left(2a_0x - 2a_0 - 2a_1x\right) + \sum_{k=2}^{\infty} \left[a_k k\left(k-1\right) - a_{k-2} + 2a_{k-1} - 2a_k\right] x^k$$

ומשווים ל $x-2$. לכן

$$2a_0 - 2a_1 = 1 \qquad -2a_0 = -2$$

לכן $a_0 = 1$ ו $a_1 = \frac{2a_0-1}{2} = \frac{1}{2}$) ולכל $k \geq 2$ מתקיים

$$a_k k\left(k-1\right) - a_{k-2} + 2a_{k-1} - 2a_k = 0$$

$$a_k\left[k\left(k-1\right) - 2\right] = a_{k-2} - 2a_{k-1}$$

ולכן מצאנו את הפתרון כיוון ש $y(0) = a_0 = 1$ ו $y'(0) = a_1 = \frac{1}{2}$.

(ב) נתון בנוסף כי $y''(0) = \frac{1}{3}$:

(ג) מצאו את y.

פתרון: ראינו כי $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מקיים: $a_0 = 1$ ו $a_1 = \frac{1}{2}$ ולכל $k \geq 2$ מתקיים

$$a_k\left[k\left(k-1\right) - 2\right] = a_{k-2} - 2a_{k-1}$$

וכעת נתון ש $y''(0) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) 0^{k-2} = 2a_2$ שווה ל $\frac{1}{3}$ לכן $a_2 = \frac{1}{3!}$. נמשיך להציב kים: עבור $k=2$ נקבל $a_2 \cdot 0 = 0$.

לכל $k \geq 3$ נקבל ש

$$a_k\left[k^2-k-2\right]=a_{k-2}-2a_{k-1}$$

$$a_k\left[(k+1)(k-2)\right]=a_{k-2}-2a_{k-1}$$

$$a_k=\frac{a_{k-2}-2a_{k-1}}{(k+1)(k-2)}$$

ונמשיך להציב $k \geq 3$:

$$a_3=\frac{a_1-2a_2}{4\cdot 1}=\frac{\frac{1}{2}-2\frac{1}{3!}}{4}=\frac{\frac{3-2}{3!}}{4}=\frac{1}{4!}$$

$$a_4=\frac{\frac{1}{3!}-2\frac{1}{4!}}{5\cdot 2}=\frac{\frac{2}{4!}}{5\cdot 2}=\frac{1}{5!}$$

ואפשר להוכיח כי לכל k מתקיים

$$a_k=\frac{1}{(k+1)!}$$

ולכן

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}x^k=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}=$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=\frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k-1\right)=\frac{1}{x}\left(e^x-1\right)$$

(ד) הביעו את y במפורש באמצעות פונקציות סטנדרטיות.

פתרון: כמו שסיימנו את הסעיף הקודם $y(x)=\frac{1}{x}\left(e^x-1\right)$.