בוחן בדידה חורף תשעו

14/12/2015 ב' טבת

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענו על כל השאלות.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. במידה והתשובות נכתבות במחברת בחינה, מספיק לכתוב ת.ז. ושם פעם אחת בעמוד הפותח.**
- הקפידו על סדר ניקיון. ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד: $4 \cdot 10 + 45 + 25 = 110$ (ארבע שאלות נכון/לא נכון של 10 נק' + שאלה של 45 נקודות + שאלה של 25 נקודות)
- מבנה הבחינה:
  - שאלה 1 (4 סעיפים): נכון/לא נכון בנושאים שונים.
  - שאלה 2: יחסים .
  - שאלה 3: אינדוקציה.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

1. ענו נכון/לא נכון (10 נקודות כל סעיף)

(א) עבור p, q פסוקים מתקיים כי

$$p \to q \equiv q \to p$$

כאשר $\equiv$ הוא הסימון לשקילות לוגית.
פתרון: לא נכון. אם $p = T, q = F$ אזי $q \to p$ הוא T ואילו $p \to q$ הוא T

(ב) נניח U קבוצה (כאשר חושבים עליה כקבוצה אוניברסלית) ונניח $A, B, C \subseteq U$ תתי קבוצות שלה אזי מתקיים

$$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$$

כאשר A^c הוא המשלים של A (במילים אחרות $U \backslash A$)
פתרון: נכון.

(ג) נניח A, B קבוצות אזי מתקיים

$$[A \backslash B = B \backslash A] \iff [A = B]$$

פתרון: נכון.
$(\Rightarrow)$ נתון כי $A \backslash B = B \backslash A$ ולכן

$$A = (A \cap B) \cup (A \backslash B) = (A \cap B) \cup (B \backslash A) = B$$

$(\Leftarrow)$נתון $A = B$ ולכן

$$A \backslash B = \emptyset = B \backslash A$$

(ד) נניח A, B, C קבוצת אזי מתקיים

$$A \cap (B \cup C) \subseteq B$$

פתרון: לא נכון. ניקח $B = \emptyset$ וניקח $A = C = \{1\}$ אזי

$$A \cap (B \cup C) = A \cap C = A \not\subseteq \emptyset = B$$

2. נגדיר $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. עוד נגדיר $\mathbb{O}$ להיות קבוצת כל יחסי השקילות על X.
נגדיר יחס $\prec$ מעל $\mathbb{O}$ באופן הבא. נניח $R_1, R_2 \in \mathbb{O}$ שני יחסי שקילות על X אזי

$$R_1 \prec R_2 \iff (|X/R_1| < |X/R_2|)$$

כאשר $|X/R_1|$ פירושו מספר האיברים בקבוצת המנה של היחס R_1.
בניסוח שקול, הקבוצה $\prec$ היא הקבוצה

$$\prec = \{(R_1, R_2) \in \mathbb{O} \times \mathbb{Q} \mid |X/R_1| < |X/R_2|\}$$

(א) הוכיחו כי $\prec$ הוא יחס סדר חזק מעל $\mathbb{O}$. (15 נקודות)
פתרון: אנטי רפלקסיבי: נניח $R \in \mathbb{O}$ אזי $|X/R| = |X/R|$ בפרט לא מתקיים $|X/R| < |X/R|$ ולכן R לא מתייחס לעצמו.
טרנזיטיבי: נניח $R_1 \prec R_2,\ R_2 \prec R_3$ אזי

$$|X/R_1| < |X/R_2|, |X/R_2| < |X/R_3|$$

ומטרנזיטיביות על מספרים טבעיים נקבל כי

$$|X/R_1| < |X/R_3|$$

שזה גורר $R_1 \prec R_3$

(ב) נגדיר את היחס $\preceq$ מעל $\mathbb{Q}$ להיות יחס הסדר החלש המתקבל מ $\prec$ ע"י איחודו עם יחס הזהות מעל $\mathbb{O}$.
כלומר, נניח $R_1, R_2 \in \mathbb{O}$ שני יחסי שקילות על X אזי

$$[R_1 \preceq R_2] \iff [(R_1 \prec R_2) \vee (R_1 = R_2)]$$

האם זהו יחס קווי? אם כן, הוכיחו. אם לא, הפריכו ע"י דוגמא. (15 נקודות)
פתרון: לא. למשל R_1 המוגדר ע"י החלוקה

$$P_1 = \{\{1,2,3,4,5\}, \{6,7,8,9,10\}\}$$

לא מתייחס ל R_2 המוגדר ע"י החלוקה

$$P_2 = \{\{1,2,3,4,6\}, \{5,7,8,9,10\}\}$$

וכן לא להפיך. למה? כי $X/R_1 = P_1, X/R_2 = P_2$ והגדלים שלהם שווים ולכן לא מתקיים $R_1 \prec R_2$ וגם לא מתקיים $R_2 \prec R_1$

(ג) מצאו, אם קיימים, איבר קטן ביותר ב$(\mathbb{O}, \prec)$ ואיבר גדול ביותר ב $(\mathbb{O}, \prec)$ (15 נקודות)
פתרון: מתקיים כי לכל R יחס שקילות על X כי

$$1 \leq |X/R| \leq 10$$

כי X/R חלוקה של X. נגדיר I_X להיות יחס הזהות אזי

$$|X/I_X| = 10$$

כי כל מחלקת שקילות היא מגודל 1.

טענה: זהו איבר גדול ביותר. הוכחה: כל יחס שקילות אחר R אם הוא מקיים

$$|X/R| < 10$$

אזי $R \prec I_X$. ואם $|X/R| = 10$ אזי קיימות 10 מחלקות שקילות . כיוון ש $x \in [x]_R$ אזי כל מחלקת שקילות היא לפחות מגודל אחד. כיוון שיש 10 איברים ב X זה אומר שגודל מחלקת שקילות היא בדיוק אחד ולכן זהו יחס הזהות.

נגדיר $S = X \times X$ להיות היחס המלא אזי $|X/S| = 1$ כי כולם מתייחסים אחד לשני. טענה: זהו איבר קטן ביותר. הוכחה: כל יחס שקילות אחר R אם הוא מקיים

$$1 < |X/R|$$

אזי $S \prec R$. ואם $|X/R| = 11$ אזי קיימת מחלקת שקילות אחת. זה אומר שכל האיברים ב X מתייחסים אחד לשני ולכן $R = S$.

3. (25 נקודות) נניח $(A, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית (חלש) שהיא שריג (כלומר שלכל שני איברים $a, b \in A$ קיימים $\sup\{a,b\}, \inf\{a,b\}$).
הוכיחו כי לכל קבוצה בת n איברים $B = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ (כאשר $0 < n \in \mathbb{N}$) קיימים $\sup(B), \inf(B)$
פתרון: נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$ (כלומר $B = \{a\}$) מתקיים כי

$$\sup(B) = \inf(B) = a$$

[עבור $n = 2$ לפי ההגדרה של שריג קיימים inf ו sup].

כעת נניח n מספר טבעי $1 <$ וכי הטענה מתקיימת לכל תת קבוצה B של A בת n איברים. נרצה להוכיח כי הטענה נכונה עבור קבוצה עם $n+1$ איברים. לשם כך נניח $B = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ תת קבוצה של A עם $n+1$ איברים. נבקש להראות כי קיימים $\sup B$ ו $\inf B$. נסתפק בהוכחת קיומו של $\sup B$ (ההוכחה עבור $\inf B$ דומה):

מהנחת האנידוקציה קיים $M' = \sup\{a_1, \ldots, a_n\}$.

כיון ש־ $(A, \leq)$ שריג קיים גם $M = \sup\{M', a_{n+1}\}$.

נבקש להראות כי $M=\sup B$. נוכיח זאת:

(1) M חסם מלעיל: אם $1\leq i\leq n$ אזי $a_i\leq M'$ לפי הגדרת M' (בפרט הוא חסם מלעיל). בנוסף $M'\leq M$ לפי הגדרת M. מטרנזיטיבות נקבל כי $a_i\leq M$.

בנוסף, לפי הגדרת M נקבל כי $a_{n+1}\leq M$ ולכן בסך הכל נקבל כי לכל $1\leq i\leq n+1$ מתקיים $a_i\leq M$.

(2) נניח L חסם מלעיל של B ונראה כי $M\leq L$. כיוון ש L חסם מלעיל של B הוא בפרט חסם מלעיל של $\{a_1,\ldots,a_n\}$ ולכן מהגדרת sup ו M' נקבל כי $M'\leq L$. כיוון ש L גם מקיים $a_{n+1}\leq L$ נקבל כי L הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\{M',a_{n+1}\}$. לכן לפי הגדרת sup ו M נקבל כי $M\leq L$ כנדרש.