תרגיל בית 4 - תורת גלואה
סמסטר א', תשע"ז

שאלה 1.

1. חשבו את הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{5}$ מעל $\mathbb{Q}$.
2. כמה תתי שדות של $\mathbb{C}$ שונים יש שאיזומורפיים ל$\mathbb{Q}$?

שאלה 2. הוכיחו כי אם $[F[\alpha]:F]$ הוא אי-זוגי אז $F[\alpha]=F[\alpha^2]$.

שאלה 3. מצאו את שדה הפיצול של הפולינומים הבאים, וחשבו את המימד שלהם מעל $\mathbb{Q}$.

1. x^7-5 .
2. x^6-x^3-2.
3. $(x^2-3)(x^2-2)$.

שאלה 4. יהי $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ פולינום מעל שדה F עם שורשים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$.
הוכיחו כי $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n=\pm a_0$ והסיקו כי שדה הפיצול הוא $F[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]=F[\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$.
(כלומר שאפשר "לזרוק" את אחד השורשים).

שאלה 5. חשבו את שדה הפיצול של x^n-2 מעל $\mathbb{Q}$ (למעשה עבור כל שדה ממאפיין אפס).
הוכיחו כי כל תת-שדה של $\mathbb{Q}[\sqrt[n]{2}]$ הוא מהצורה $\mathbb{Q}[\sqrt[k]{2}]$ עבור איזשהו מחלק $k\mid n$.
(הנחיה: הסתכלו בפולינום המינימלי מעל התת-שדה, והעזרו בשאלה הקודמת כדי להבין איזה איברים יש שם).

שאלה 6. יהיו $F\subset L\subset F[a]$ שדות. ויהי $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ הפולינום המינימלי של a **מעל** $\underline{L}$.
הוכיחו כי L נוצר (מעל F) ע"י כל המקדמים של f, כלומר ש $L=F[a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}]$.