בס"ד

אוניברסיטת **בר-אילן**

מינהל הסטודנטים

מדור הבחינות

שאלון סגור

מספר הקורס: 88-112-01

תאריך בחינה: 15.3.12

מס' מחז': 19
שנת: תשע"ב סמסטר: 1 מועד: 2 מטלה: 1
קורס: 01 112 88 אלגברה לינארית 1

המחברת נבדקה ביום: ______

הציון: 82

חתימת המרצה: ______

מס' סידורי ___ מתוך ___ מחברות

הוראות לנבחן

1. עליך להבחן בחדר בו הנך רשום.
2. הנח ליד המשגיח בבחינה את חפציך האישיים כגון: תיקים, ספרים, מחברות, מכשירים סלולריים, קלמרים וכו'.
3. אסור להחזיק בהישג יד חומר הקשור לבחינה/לקורס אלא אם הותר הדבר בכתב על ידי המרצה ורק בהתאם למותר.
4. מסור למשגיח/ה על הבחינה תעודת זהות וכרטיס נבחן חתום ותקף לסמסטר בו מתקיימת הבחינה.
5. **היציאה לשירותים במהלך הבחינה אסורה בהחלט.** נשים בהריון ונבחנים באישור מתאים רשאים לבקש מהמשגיח/ה לצאת. היציאה בליווי המשגיח/ה ובהתאם לנוהלי האוניברסיטה.
6. נבחן היוצא ללא רשות מחברתו תפסל ותועבר לועדת משמעת.
7. יש להישמע להוראות המשגיח/ה. אין לעזוב את חדר הבחינה ללא קבלת רשות. חל איסור מוחלט לפנות לנבחנים אחרים בכל עניין ודבר. **בכל עניין פנה למשגיח/ה.**
8. בתחילת הבחינה מלא את פרטיך האישיים ע"ג המחברת. תלמיד שקיבל לידיו שאלון ואין ברצונו להיבחן, חייב להמתין 1/2 שעה בכיתה מתחילת הבחינה. תלמיד שעזב את האולם אחרי חלוקת השאלונים או לא מסר את מחברתו עד תום הבחינה או מסר מחברת ריקה - דינו כדין נכשל.
9. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח/ה.
10. יש לכתוב את התשובות בדיו, בכתב ברור ונקי על **עמוד אחד של כל דף**. אין לכתוב בשוליים, הכותב טיוטה יקדיש לה את הצד הימני של המחברת ואת ההעתקה הנקיה יכתוב בצד השמאלי. את הטיוטה יש למחוק בהעברת קו. אסור לתלוש דפים מן המחברת.
11. עבר הנבחן על תקנות הבחינות, תשלל ממנו הרשות להמשיך בבחינה, והוא יועמד לדין משמעתי.
12. משך זמן הבחינה מצויין בראש השאלון. עם הודעת המשגיח/ה כי תם הזמן, על הנבחן להפסיק את הבחינה, למסור את המחברת עם השאלון ולצאת מאולם הבחינה. מחברת שלא נמסרה בתום ההודעה לא תיבדק.
13. אחזקת מכשיר טלפון סלולרי (אפילו סגור) ברשות הנבחן, מביאו מיידית לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שיימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או ייתפס בהעתקה, ייענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

שנה"ל תשע"ב סמסטר א' מועד ב'
מס' קורס 88-112-01
מחלקה מתמטיקה תאריך 15.03.12
המרצה פרופ' אנדריי רצניק
מבחן חלק (אם הבחינה בשני חלקים) ______

הוראות לנבחן בנושא סריקה:
אין לכתוב במחברת בעפרון. יש לכתוב בעט בצבע כחול כהה או שחור בלבד. אין להשתמש בנוזל מחיקה (טיפקס).
אין לכתוב בשוליים משני צידי הדף. מחברת בכתב מרושל משפיעה על תוצאות הסריקה.

שים לב! השוליים יחתכו לפני הסריקה, לכן, חל איסור מוחלט לכתוב כאן.

תשע"ב 2012

אלגברה ליניארית 1

שאלון סגור

מועד ב. 88-112 מרצה: פרופ. א. רזניקוב.

<u>משך בחינה</u> : **3** שעות **(לאחר הארכה).**

<u>הנחיות:</u> יש לפתור את <u>כל</u> **3** השאלות. (ציון המקסימאלי הוא 100)

אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף.</u> <u>המחברת לא תבדק.</u>

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

שאלון סגור

1. יהי $U \subseteq V$ תת-מרחב במרחב נוצר סופית V.

א) (17 נק') הוכיחו שקיים אופרטור $T: V \to V$ כך ש- $Ker(T) = U$.

ב) (17 נק') הוכיחו שקיים אופרטור $S: V \to V$ כך ש- $\mathrm{Im}(S) = U$.

2. תהי $A \in M_{m\times m}(F)$ עם $rank(A) = r$. נגדיר אופרטור $T_A: M_{m\times n}(F) \to M_{m\times n}(F)$ על-ידי $T_A(X) = A\cdot X$ לכל $X \in M_{m\times n}(F)$.

א) (25 נק') חשבו $\mathrm{Im}(T_A) \subseteq M_{m\times n}(F)$ (רמז: איך זה קשור ל- $Cspan(A) \subseteq F^m$?)

ב) (9 נק') חשבו $\dim Ker(T_A)$ ו- $\dim \mathrm{Im}(T_A)$.

3.

א) (17 נק') יהי $F = \mathbb{Z}_p$ שדה סופי עם p איברים (p ראשוני).

חשבו <u>מספר</u> של כל העתקות ליניאריות $T: F^n \to F^m$ (זה קבוצה סופית!).

(רמז: חשבו מימד קודם)

ב) (17 נק') יהיו $A, B \in M_{m\times n}(F)$ מטריצות המקיימות $Cspan(A) \subseteq Cspan(B)$.

הוכיחו שקיימת מטריצה $C \in M_{n\times n}(F)$ כך ש- $A = BC$.

בהצלחה!

<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף.</u> <u>המחברת לא תבדק.</u>

<u>נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.</u>

טופס פתרונות *שאלון סגור*

אלגברה ליניארית 1, מועד ב. 88-112 מרצה: פרופ. א. רזניקוב.

נא כתבו פיתרון סופי <u>מפורט</u> בטופס זה. במקרה *חרום* מותר להשתמש בדף נוסף המצורף בסוף הטופס.
ההתייחסות למחברת היא כטיוטה בלבד.
<u>המחברת לא תבדק.</u>
<u>נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.</u>

מס' שאלה	1	2	3	
ציון	34	34	14	

פתרון לשאלה : $\boxed{2}$ (א)

$AX=B \;:\; \exists X\in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \iff B\in Im(T_A)$.

$T(X)=B$

$AX=B$

$$B=AX=A\begin{pmatrix} | & & | \\ C_1(X) & \cdots & C_n(X) \\ | & & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & & | \\ AC_1(X) & \cdots & AC_n(X) \\ | & & | \end{pmatrix}=$$

$$=A\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1}\end{pmatrix}+\cdots+A\begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{mn}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{m} x_{ik}C_i(A)$$

$\Leftarrow$ B הוא צ"ל של עמודות A.

$B\in Im(T_A)$

$C\text{span}(B)\subseteq C\text{span}(A)\subseteq \mathbb{F}^m$

$Im(T_A)=\{B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \mid C\text{span}(B)\subseteq C\text{span}(A)\}$

(ב) $Rank(A)=r$. נבחר בסיס ל- $Im(T_A)$: $\{v_1,\dots,v_r\}$

$(Im(T_A)=\{B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \mid C\text{span}(B)\subseteq C\text{span}(A)\})$

$$B=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_{1i}v_i & \sum_{i=1}^{r}\alpha_{2i}v_i & \cdots & \sum_{i=1}^{r}\alpha_{ni}v_i \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \alpha_{11}v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & & | \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \alpha_{1r}v_r & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ &\begin{pmatrix} | & & | & | \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n1}v_1 \\ | & & | & | \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} | & & | & | \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nr}v_r \\ | & & | & | \end{pmatrix}\end{aligned}\right\} n \text{ מטריצות}$$

$\Rightarrow \dim(Im(T_A))=n\cdot r$

$\Rightarrow \dim(Ker(T_A))=\underbrace{n\cdot m}_{\text{המימד של כל המרחב}}-\underbrace{n\cdot r}_{\text{המימד של ה- }Im}=n(m-r)$

שאלה $\boxed{3}$: (א) אומר כל העתקה לינארית $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$:

$$Hom(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m) \cong \underset{m\times n}{Mat}(\mathbb{F}) = \{A \in \underset{m\times n}{M}(\mathbb{F})\}$$

$$\dim(Hom(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)) = \dim(\underset{m\times n}{Mat}(\mathbb{F})) = \cancel{m\times n}$$

$\cancel{m\times n}$ הוא $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ כל העתקה לינארית $\Leftarrow$ $\boxed{\text{מספר}}$?

איפה ?

-10

שאלה מס' $\boxed{1}$ (ב) בסיס של U: $\{u_1, \dots, u_k\}$

בסיס של V: $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$

נגדיר העתקה ע"י משפט ההגדרה:

$$T(u_1) = u_1$$
$$\vdots$$
$$T(u_k) = u_k$$
$$T(u_{k+1}) = 0$$
$$\vdots$$
$$T(u_n) = 0$$

כעת נשים להראות: $Im(S) = U$

$$Im(S) = span\{T(u_1), \dots, T(u_k)\} =$$
$$= span\{u_1, \dots, u_k\} = U$$

$\Rightarrow \boxed{Im(S) = U}$

✓

פתרון לשאלה $\boxed{1}$: (א) נבחר בסיס ל-U: $\{u_1, \dots, u_k\}$

נשלים את הבסיס של U לבסיס של V: $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$

נגדיר העתקה ע"י משפט ההגדרה:

$$T(u_1) = 0$$
$$\vdots$$
$$T(u_k) = 0$$
$$T(u_{k+1}) = u_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$T(u_n) = u_n$$

נשים להראות: $ker(T) = U$

$u_1, \dots, u_k \in ker(T)$

$T(u_i) = 0 \quad \forall i \; 1 \le i \le k$

ידוע: $U \le ker(T)$

נראה שוויון מימדים ואז נקבל הדרוש:

$\boxed{\dim U = k}$

$$\dim(ker(T)) = \dim V - \dim(Im(T))$$
$$= n - (n-k) = k$$
$$\dim(ker(T)) = \dim U = k$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{ker(T) = U}$$

✓

וסף.

שאלה מס׳ $\boxed{3}$ (א) נשתמש בהעתקות לינאריות

נגדיר הבא: $T_A, T_B : F^n \longrightarrow F^m$ ע״י: $T_A = A\cdot X,\ T_B = B\cdot X$

(וגם) $T_C : F^n \longrightarrow F^n$ המוגדרת ע״י: $T_C(Y) = Y\cdot C$

כך שמתקיים: $T_A = T_B \cdot T_C$ כאשר נתון: $Im(T_A) \subseteq Im(T_B)$

⊛ $\ker(T_B) \subseteq \ker(T_A)$

נבחר בסיסים ל- $.Null(B), Null(A)$

$\ker(T_B) : \{V_1, \dots, V_B\}$

$\ker(T_A) : \{V_1, \dots, V_B, V_{B+1}, \dots, V_A\}$

ונשלים לבסיס של כל המרחב:

$F^n : \{V_1, \dots, V_B, V_{B+1}, \dots, V_A, V_{A+1}, \dots, V_n\}$

נגדיר את ההעתקה עפ״י משפט ההגדרה:

$$
\begin{array}{lll}
T_A(V_1) = 0 & T_B(V_1) = 0 & T_C(Z_1) = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
T_A(V_B) = 0 & T_B(V_B) = 0 & T_C(Z_t) = 0 \\
T_A(V_{B+1}) = 0 & T_B(V_{B+1}) = 0 & T_C(W_{B+1}) = V_{B+1} \\
\vdots & \vdots & \\
T_A(V_A) = 0 & T_B(V_A) = 0 & T_C(W_A) = V_A \\
T_A(V_{A+1}) = U_{A+1} & T_B(V_{A+1}) = U_{A+1} & T_C(W_{A+1}) = V_{A+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
T_A(V_n) = U_n & T(V_n) = U_n & T_C(W_n) = V_n
\end{array}
$$

לא משנה לאן הולכים

?

לא

$\{Z_1, \dots, Z_t, W_{B+1}, \dots, W_A, W_{A+1}, \dots, W_n\}$ ⊛

מצאנו העתקה המקיימת $T_A = T_B \cdot T_C$ ומכאן השגנו שקיימת מטריצה $C \in M_{n\times n}(F)$ כך ש- $A = B\cdot C$ (שהיא הצגת המטריצה המייצגת).

$T_A(V_{A+1}) = T_B(V_{A+1})$?

למה?

-10

זה לא נכון