תרגול 12- ממפ

תרגיל. יהיו ווקטורים v_1, v_2 המקיימים $\forall v \in V : \langle v_1, v\rangle = \langle v_2, v\rangle$ אז $v_1 = v_2$

פתרון. אם $\forall v \in V : \langle v_1, v\rangle = \langle v_2, v\rangle$ מתקיים לכל v אז השיוון מתקיים בפרט עבור $v = v_1 - v_2$ ואז נקבל

$$\begin{gathered}\langle v_1, v_1 - v_2\rangle = \langle v_2, v_1 - v_2\rangle \\ \Downarrow \\ \langle v_1, v_1 - v_2\rangle - \langle v_2, v_1 - v_2\rangle = 0 \\ \Downarrow \\ \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2\rangle = 0 \\ \Downarrow \\ v_1 - v_2 = 0 \\ \Downarrow \\ v_1 = v_2\end{gathered}$$

הגדרה. נאמר שהקבוצה $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ היא אורתונורמלית אם

$$\langle v_i, v_j\rangle = \left\{\begin{array}{ll} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{array}\right.$$

ו-B הוא בסיס אורתונורמלי אם B בסיס וגם קבוצה אורתונורמלית.

הערה. משפט פתגורס תהיה $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ קבוצה אורתוגנלית אז מתקיים

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$$

נראה עבור $n = 2$,צריך להראות ש-

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \underbrace{\langle w, v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, w\rangle}_{=0} + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

תרגיל. תהי נתונים $\{v, u, w\}$ קבוצה אורתונורמלית חשבו את $\|3v + u - 2w\|^2$

$$\begin{array}{rcccc} \|3v + u - 2w\|^2 & = & \langle 3v + u - 2w, 3v + u - 2w\rangle & = & \\ & = & \langle 3v, 3v\rangle + \underbrace{\langle 3v, u\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 3v, -2w\rangle}_{=0} & + & \\ & & \underbrace{\langle u, 3v\rangle}_{=0} + \langle u, u\rangle + \underbrace{\langle u, -2w\rangle}_{=0} & + & \\ & & \underbrace{\langle -2w, 3v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle -2w, u\rangle}_{=0} + \langle -2w, -2w\rangle & = & \\ & = & 9\|v\|^2 + \|u\|^2 + 4\|w\|^2 & = & \\ & = & 9 \cdot 1 + 1 + 4 \cdot 1 & = & 14 \end{array}$$

הגדרה. יהי V ממ"פ, ו-S קבוצה של V אז המרחב הניצב של S הוא

$$S^{\perp}=\{u\in V|\forall w\in S:\ \langle w,u\rangle=0\}$$

תרגיל. מצאו את המרחב הניצב של $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. מרחב הניצב הוא

$$\begin{aligned}W^{\perp} &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V\middle|\left\{\begin{array}{c}\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\rangle=0\\ \left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{array}\right.\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V\middle|\left\{\begin{array}{c}x+2y+3z=0\\ y+2z=0\end{array}\right.\right\}\\ &= span\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

הגדרה. יהי Vמו, אז היטל של וקטור vעל התת מרחב w (נסמן $W=Span\{w\}$) הוא וקטור $\pi_W(v)$ המקיים

1. $\pi_W(v)\in W$
2. $v-\pi_W(v)\in W^{\perp}$

הערה. יהיו v,w וקטורים אז

$$\pi_W(v)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}w$$

(ראו בהרצאה את ההגדרה של היטל של וקטור על תת מרחב)

תרגיל. מצאו את היטל של הווקטור $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ על הווקטור $w=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

פתרון. לפי הערה

$$\pi_W(v)=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1+2+3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

ואכן מתקיים $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\in Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ו-$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\in W^{\perp}$