לינארית למורים - תרגיל 1 - מרוכבים

שאלה 1. כתוב את הביטויים הבאים צורה של $a+bi$

1. $(1+5i)(3-4i)$

פתרון.

$$(1+5i)(3-4i)=3-4i+15i-20i^2=23+11i$$

2. $\left(\overline{1+6i}\right)\cdot(1+i)$

פתרון.

$$\left(\overline{1+6i}\right)\cdot(1+i)=(1-6i)\cdot(1+i)=1-6i+i+6=7-5i$$

3. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$

פתרון.

ראשית נציג את $\frac{1-i}{1+i}$ כמספר מרוכב

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{1-i}{1+i}\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-2i-1}{1+1}=-i$$

לכן

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}=(-i)^{10}=(-i)^4(-i)^4(-i)^2=-1$$

שאלה 2. חשב את הביטויים הבאים

1. $|1+2i|$

פתרון.

כזכור $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ לכן

$$|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

2. $\left|\frac{1-i}{1+i}\right|$

פתרון.

ראשית נציג את $\frac{1-i}{1+i}$ כמספר מרוכב

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{1-i}{1+i}\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-2i-1}{1+1}=-i$$

לכן

$$\left|\frac{1-i}{1+i}\right|=|-i|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$$

שאלה 3. פתור את המשוואות הבאות:

1. $z^2+z+1=0$

פתרון.

לפי נוסחת השורשים

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

2. $z^3-10z^2+34z=0$

פתרון.

$$z^3-10z^2+34z=0\Rightarrow z\left(z^2-10z+34\right)=0$$

כלומר $z=0$ או $z^2-10z+34=0$ ולפי נוסחת השורשים

$$z=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot34}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}=5\pm3i$$

מכאן התשובה הסופית היא $z_1=0,z_2=5+3i,z_3=5-3i$

3. $z^2-(1-3i)\,z-2i-2=0$

פתרון.

$$z=\frac{(1-3i)\pm\sqrt{(1-3i)^2-4\cdot1\cdot(-2i-2)}}{2}=\frac{1-3i\pm\sqrt{2i}}{2}\underset{2i=(1+i)^2}{\underset{\downarrow}{=}}\frac{1-3i\pm(1+i)}{2}$$

לכן $z_1=1-i,z_2=-2i$

4. $(i+1)\,(x+iy)=4+2i$ כאשר x,y ממשיים

פתרון.

$$\begin{array}{rcl}(i+1)\,(x+iy)&=&4+2i\\&\Downarrow&\\x-y+(x+y)\,i&=&4+2i\end{array}$$

לכן לפי יחידות ההצגה מתקיים

$$\begin{cases}x-y=4\\x+y=2\end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$$

5. $2z^2=3\overline{z}$

פתרון.
נציב $z = a + bi$ ונקבל

$$\begin{gathered} 2z^2 = 3\overline{z} \\ \Downarrow \\ 2\left(a+bi\right)^2 = 3\left(a-bi\right) \\ \Downarrow \\ 2\left(a^2+2abi-b^2\right) = 3\left(a-bi\right) \\ \Downarrow \\ 2a^2-2b^2+4abi = 3a-3bi \\ \Downarrow \\ \begin{cases} 2a^2-2b^2 = 3a \\ 4ab = -3b \end{cases} \end{gathered}$$

מהמשוואה שנייה נקבל ש-$b = 0$ או $a = -\frac{3}{4}$.

- אם $b = 0$ אז המשוואה ראשונה היא $2a^2 = 3a$ ובמקרה זה $a = 0, \frac{3}{2}$
- אם $a = -\frac{3}{4}$ אז המשוואה שראשונה היא $2 \cdot \frac{9}{16} - 2b^2 = -\frac{9}{4}$ כלומר $b^2 = \frac{27}{4}$ מכאן ש-$b = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

לסיכום $z = -\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, 0, \frac{3}{2}$

תרגיל 4.
(מאתגר) בסדרה הנדסית נתון $a_1 = 1, a_2 = i$ הוכח שלכל n טבעי סכום $4n$ האיברים הראשונים שווה ל-0.

פתרון.
תחילה נמצא את מנת הסדרה

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{i}{1} = i$$

לכן סכום $4n$ האיברים הראשונים שווה ל-

$$S_{4n} = \frac{a_1\left(q^{4n}-1\right)}{q-1} = \frac{1\left(\left(i\right)^{4n}-1\right)}{i-1} = 0$$

בהצלחה!!