תרגיל 10

1. יהי R חוג. הוכיחו שאם כל מודול מעל R הוא נאמן, אז R חוג פשוט.

2. תנו דוגמא לחוג R אידיאל שמאלי לא טריוויאלי I, כך R/I הוא מודול נאמן מעל R.

3. יהי R חוג. ניזכר ש-R הוא מודול מעל עצמו.

   (א) הוכיחו: R מודול פשוט מעל עצמו אם ורק אם R הוא חוג עם חילוק.

   (ב) נניח ש-R חילופי, ויהי $I \lhd R$ אידאל של R (לכן הוא גם תת־מודול של R כמודול מעל עצמו). הראו ש-I נוצר על ידי d איברים כאידאל (כלומר $I = \langle a_1, \ldots, a_d \rangle$) אם ורק אם I נוצר על ידי d איברים כתת־מודול של R.

   (ג) תנו דוגמה למודול ציקלי M מעל חוג R ולתת־מודול $N \leq M$ כך ש-N אינו ציקלי. (רמז: $R = M$ עבור R לא תחום ראשי)

4. ניזכר כי $\mathbb{Q}$ הוא חבורה אבלית ולכן מודול מעל $\mathbb{Z}$. הוכיחו של$\mathbb{Q}$ לא קיים בסיס כמודול מעל $\mathbb{Z}$.

5. יהי M מודול מעל חוג מנה R/I. הוכיחו כי M הוא מודול מעל R לפי הפעולה $rm := (r+I)m$. בנוסף הוכיחו $I \subseteq Ann_R(M)$.

6. יהי M הוא מודול מעל חוג R, ויהי $I \lhd R$ אידאל. הראו ש-IM (מוגדר להיות כל מה שנוצר ע"י איברים מהצורה im, עבור $i \in I$ ו$m \in M$) הוא תת-מודול של M מעל R, וכי ${}^{M}/{}_{IM}$ יורש באופן טבעי מבנה של מודול מעל ${}^{R}/{}_{I}$.