סיכום תרגיל כיתה 9

<u>בעיה 1</u>

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים.
<u>הוכיחו</u> שהמרחבים $Y \times X$ ו- $X \times Y$ הומאומורפיים.

<u>הוכחה</u>

נתבונן בעתקה $i: X \times Y \to Y \times X$ המוגדרת על ידי השוויון:
$i((x,y)) = (y,x)$ לכל $x \in X$ ו-$y \in Y$. נוכיח ש-i – הומאומורפיזם.

(1) ברור שההעתקה הזאת <u>על</u>. חוץ מזה היא <u>חח"ע כי:</u>

$$i\big((x_1,y_1)\big) = i\big((x_2,y_2)\big) \Rightarrow (y_1,x_1) = (y_2,x_2) \Rightarrow$$
$$y_1 = y_2 \wedge x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$$

(2) $i(U \times V) = V \times U$ פתוחה ב-$Y \times X$ לכל זוג (U, V) שבו $U \subseteq X$ פתוחה ב-X ו-$V \subseteq Y$ פתוחה ב-Y. כלומר, תמונה של כל איבר הבסיס של $X \times Y$ פתוחה. אזי i <u>פתוחה</u>.

(3) $i^{-1}(V' \times U') = U' \times V'$ פתוחה ב-$X \times Y$ לכל זוג (U', V') שבו $U' \subseteq X$ פתוחה ב-X ו-$V' \subseteq Y$ פתוחה ב-Y, כלומר , תמונה הפוכה של כל איבר הבסיס של $Y \times X$ פתוחה.
אזי i <u>רציפה</u>.

מ-(1), (2), (3) נובע ש-i הומאומורפיזם, מז"ל.

<u>בעיה 2.</u>

יהי X מ"ט. נסמן ב$T_\times$ טופולוגיה במרחב $X \times X$
ונסמן ב-T טופולוגיה במרחב $X \times X_{disc}$.
<u>הוכיחו</u>: $T_\times \subseteq T$.

<u>הוכחה.</u>

בטופולוגיה דיסקרטית כל תת קבוצה פתוחה. לכן בסיס

של $X \times X_{disc}$ זה אוסף $\mathcal{B}$ של כל תת הקבוצות מסוג $U \times A$
כאשר U פתוחה ב-X ו-$A \subseteq X$. מזה מייד נובע שבסיס $\mathcal{B}_\times$ ל-$T_\times$
(שאיבריו הם מסוג $U \times V$ כאשר U, V פתוחות ב-X) מוכל ב-$\mathcal{B}$.
אנחנו יודעים שפעולה "^" שומרת את יחס ההכלה וחוץ מזה:

$$\text{טופולוגיה} = \widehat{(\text{בסיס})}$$

אזי : $T = \widehat{\mathcal{B}} \subseteq \widehat{\mathcal{B}_\times} = T_\times \Leftarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_\times$,
כלומר $T_\times \subseteq T$, מש"ל.

<u>בעיה 3</u>

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$. יהי $I_{(a,b;c)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a < x < b, y = c\}$

<u>הוכיחו</u>

א' אוסף של הקטעיים $\mathcal{B} = \{I_{(a,b;c)} | a < b, c \in \mathbb{R}\}$ הוא בסיס
לטופולוגיה מסויימת T (שאולי שונה מטופולוגית המכפלה!)
על הקבוצה $\mathbb{R}^2$.

<u>הוכחה</u>

<u>תזכורת</u>:
<u>תנאי מספיק לכך ש-$\mathcal{B}$ הוא בסיס לטופולוגיה (ההרצאה):</u>

(1) אם לכל שתי קבוצות $U, V \in \mathcal{B}$ לא זרות
מתקיים $U \cap V \in \mathcal{B}$
(2) $X \in \widehat{\mathcal{B}}$

==========================

(1) $\emptyset \neq I_{(a_1,b_1;c_1)} \cap I_{(a_2,b_2;c_2)} \Leftarrow y = c_1 = c_2 \Leftarrow$
$I_{(a_1,b_1;c_1)} \cap I_{(a_2,b_2;c_2)} = I_{(a,b;y)} \in \mathcal{B}$

כאשר $a = \max\{a_1, a_2\}$, $b = \min\{b_1, b_2\}$.
- לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $(x, y) \in I_{(x-1,x+1;y)}$ לכן (הלמה השימושית): $\mathbb{R}^2 \in \widehat{\mathcal{B}}$.

קיבלנו: $\mathcal{B}$ בסיס של טופולוגיה $T = \widehat{\mathcal{B}}$, מש"ל.

ב' T מתלכדת עם טופולוגית המכפלה של המרחב $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{disc}$.

<u>הוכחה</u>

אוסף קטעים פתוחים $\mathcal{I} = \{(a, b)|\ a < b\}$ הוא בסיס לטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}$ (ההרצאה). אוסף נקודונים $\mathcal{P}$ הוא בסיס של $\mathbb{R}_{disc}$ כי כל תת קבוצה יכולה חהיות מוצגת כאחוד נקודונים.
לפי אחד מהשפטים שהוכחו בהרצאה ,
אוסף תת קבוצות $\mathcal{D} = \{(a, b) \times \{p\}|\ (a, b) \in \mathcal{I} \wedge \{p\} \in \mathcal{P}\}$ הוא בסיס של המרחב $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{disc}$. אבל קל לראות ש-$\mathcal{D} = \mathcal{B}$ כי

$$I_{(a,b;p)} = (a, b) \times \{p\}$$

לכן $\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{\mathcal{B}} = T$, מש"ל .

ג' T מכילה את טופולוגיה הרגילה ב-$\mathbb{R}^2$

<u>הוכחה</u>

הקבוצה $(a, b) \times (c, d)$ היא קבוצה מבסיס $\mathcal{B}_E$ של הטופולוגיה הרגילה ב-$\mathbb{R}^2$.
זה נובע מאותו משפט שדובור עליו בסעיף ב': אוסף הקבוצות מסוג $\{(a, b)|a < b\}$ מהווה בסיס של $\mathbb{R}$ ולכן אוסף הקבוצות $\mathcal{B}_E = \{(a, b) \times (c, d)|a < b, c < d\ \}$ מהווה בסיס של $\mathbb{R}^2$.
כל איבר של $\mathcal{B}_E$ אפשר להציג כאחוד:

$$(a,b)\times(c,d)=\bigcup_{y\in(c,d)} I_{(a,b;y)}$$

אזי $\mathcal{B}_E\subseteq\widehat{\mathcal{B}}=T$ ולכן $\widehat{\mathcal{B}_E}\subseteq T$, מש"ל.

<u>בעיה 4</u>

יהיו $X_1\times\ldots\times X_n$ מרחבים טופולוגיים. נסמן ב-$\tau_\times$ את טופולוגית המכפלה. תהי T טופולוגיה על הקבוצה $X_1\times\ldots\times X_n$ כך שההטלות $p_i\colon(X_1\times\ldots\times X_n,T)\to X_i$ $(1\le i\le n)$ רציפות.

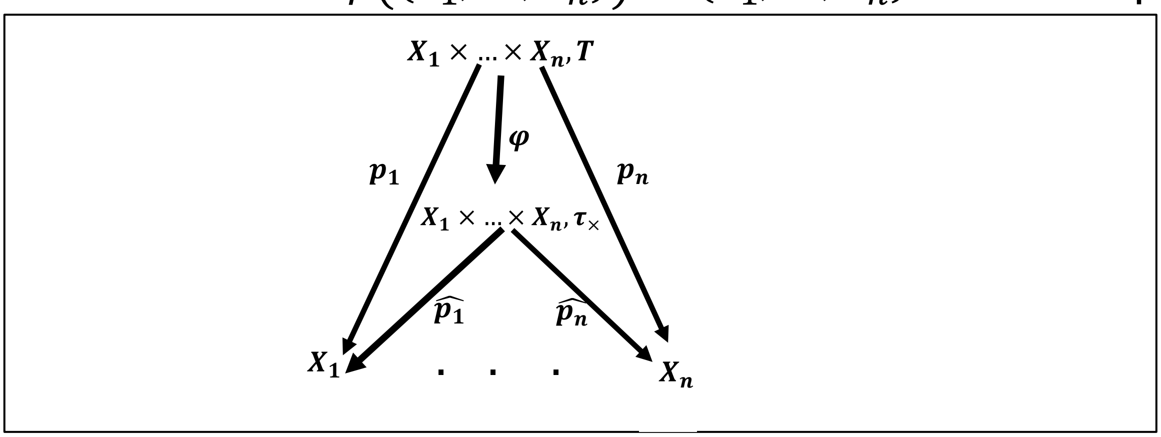
<u>הוכיחו</u> ש-$\tau_\times\subseteq T$.

<u>הוכחה.</u>

כדי למנוע דו-משמעות נסמן את ההטלות מהמכפלה כ- $\widehat{p_i}$.

נגדיר פונקציה $\varphi\colon(X_1\times\ldots\times X_n,T)\to(X_1\times\ldots\times X_n,\tau_\times)$

כפונקצית זהות: $\varphi\big((x_1,\ldots,x_n)\big)=(x_1,\ldots,x_n)$.



אזי $p_i=\widehat{p_i}\circ\varphi$ (ראה השרטוט). מכיוון ש-p_i רציפות מהתנאי, גם φ רציפה (משפט מההרצאה). מהגדרת הרציפות:

אם $W\in\tau_\times$, אז $T\ni W=\varphi^{-1}(W)$. לכן $\tau_\times\subseteq T$, מש"ל.

<u>בעיה 5</u>

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ו- $A,F\subseteq X$; $B,G\subseteq Y$.

<u>הוכיחו</u>:

א) אם F,G סגורות אז $F \times G$ סגורה.
ב) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

<u>הוכחה</u>

א)

$$(F \times G)^c = \{(x,y) \in X \times Y |\, x \notin F \vee y \notin G\} =$$
$$F^c \times Y \cup X \times G^c$$

F^c, G^c פתוחות כמשלימים לסגורת (במ"ט X,Y בהתאם).
לכן $F^c \times Y, X \times G^c$ פתוחות לפי הגדרת מרחב המכפלה.
אזי $(F \times G)^c$ פתוחה כאחוד פתוחות ואז $F \times G$ סגורה, מש"ל.

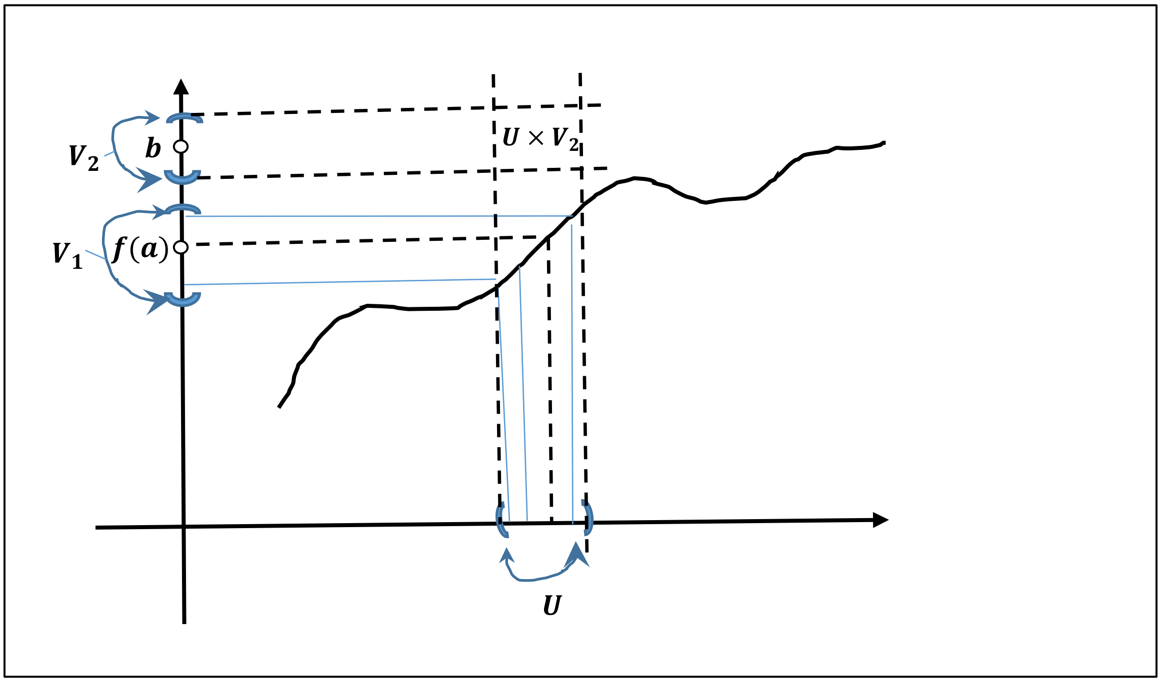
ב1) <u>$\overline{A \times B} \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$.</u>
לפי תכונות הסגור: $A \subseteq \bar{A}$ ו-$B \subseteq \bar{B}$ ולכן $A \times B \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$ (*)
אבל $\bar{A}, \bar{B}$ סגורות (כל אחת - כסגור) ולפי א) - $\bar{A} \times \bar{B}$ סגורה.
אזי מ-(*) נובע: $\overline{A \times B} \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$ (תכונת הסגור) .

ב2) <u>$\bar{A} \times \bar{B} \subseteq \overline{A \times B}$</u> .
נניח ש- $(x,y) \in \bar{A} \times \bar{B}$ ו-W סביבה של (x,y) ששייכת לבסיס תופולוגית המכפלה. כלומר,
- $x \in \bar{A}$ ו- $y \in \bar{B}$ (**)
- קיימות קבוצות פתוחות U,V

כך ש-$W = U \times V$, $x \in U \subseteq X$ ו- $y \in V \subseteq Y$.
אזי מ-(**) : $U \cap A \neq \emptyset$ ו-$V \cap B \neq \emptyset$
ולכן $W \cap A \times B = U \times V \cap A \times B \neq \emptyset$.
כלומר, סביבה של (x,y) מבסיס המכפלה בהכרח חותכת את $A \times B$. זה גורר שכל סביבה של (x,y) חותכת את $A \times B$. לכן: $(x,y) \in \overline{A \times B}$.
אזי $\bar{A} \times \bar{B} \subseteq \overline{A \times B}$ ולבסוף: $\bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B}$, מש"ל.

בעיה 6

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ו-Y מרחב האוסדורף. תהי $f\colon X\to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו ש- $\{(x,y)\in X\times Y|y=f(x)\}$ קבוצה סגורה במרחב המכפלה $X\times Y$.



הוכחה

נסמן: $\Gamma\coloneqq\{(x,y)\in X\times Y|y=f(x)\}$

נוכיח שהקבוצה Γ^c פתוחה. יהי $(a,b)\in\Gamma^c$. אזי $f(a)\neq b$.

לפי תנאי האוסדורף ב-Y קיימות סביבות V_1 של $f(a)$ ו-V_2 של b כך ש-$V_1\cap V_2=\emptyset$. מכיוון ש-f רציפה בנקודה a, קיימת סביבה $X\subseteq U\ni a$ כך ש- $f(U)\subseteq V_1$. לכן $f(U)\cap V_2=\emptyset$.

זה גורר $U\times V_2\cap\Gamma\ =\emptyset$. (נוכיח את זה נקודה - נקודה:

אם – <u>בשלילה</u> – קיימת נקודה $(c,d)\in U\times V_2\cap\Gamma$, אז:

$c\in U\wedge d\in V_2\wedge f(c)=d\Rightarrow f(c)\in f(U)\wedge f(c)=d\in V_2$

כלומר: $f(c)\in f(U)\cap V_2$ וזה <u>סותר</u> ל-$f(U)\cap V_2=\emptyset$).

לכן $(a,b)\in U\times V_2\subseteq\Gamma^c$. אבל $U\times V_2$ היא קבוצה פתוחה במרחב המכפלה וקיבלנו ש-(a,b) היא נקודה פנימית של Γ^c .

כך הוכחנו ש-Γ^c פתוחה $\Leftarrow$ Γ סגורה, מש"ל.

בעיה 7
יהיו Y, X מ"ט ותהי $f: X \to Y$ פונקציה רציפה .הגרף של f הוא
תת מרחב של $X \times Y$ המוגדר באופן הבא:
$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$.
הכיחו ש-X הומאומורפי ל- Γ_f .
הוכחה
נגדיר $g: X \to \Gamma_f$ כך ש-$g(x) = (x, f(x))$.
הפונקציה הזאת היא פונקציה הפיכה:
אם $p_X: X \times Y \to X$ - ההטלה של $X \times Y$ על X , אז קל לבדוק ש-:
$g \circ p_X|_{\Gamma_f} = Id_{\Gamma_f}$ ו- $p_X|_{\Gamma_f} \circ g = Id_X$.
הבדיקה:

$$g \circ p_X|_{\Gamma_f}\left((x, f(x))\right) = g\left(p_X|_{\Gamma_f}\left((x, f(x))\right)\right) = g(x) = (x, f(x)) = Id_{\Gamma_f}(x, f(x))$$

ו-

$$p_X|_{\Gamma_f} \circ g(x) = p_X|_{\Gamma_f}(g(x)) = p_X|_{\Gamma_f}\left((x, f(x))\right) = x = Id_X(x)$$

===(סוף הבדיקה)=====
כלומר הפונקצי ההפוכה ל-g , $g^{-1} = p_X|_{\Gamma_f}$.
g^{-1} רציפה כצמצום של ההטלה הרציפה (ההרצאות).
נשאר להוכיח ש-g בעצמה – רציפה ואז נקבל הומאומורפיזם.
לנוחות, במקום g נתבונן בפונקציה $h: X \to X \times Y$ כך ש- g תוצאת צמצום הטווח שלה, ונוכיח את רציפותה של h. העתקה h היא העתקה למרחב המכפלה ולפי הגדרתה $h = (Id_X, f)$.
רכיביה Id_X ו-f - רציפים. לכן גם $h = (Id_X, f)$ רציפה (ההרצאות), ולכן גם g רציפה , מש"ל.