

תרגיל 2 בחזור"א 1

1. מצא חסם עליון וחסם תחתון לקבוצות:

א. $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}$

ב. $\left\{ \frac{n^2}{2n^2 - 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

ג. $\left\{ \frac{2^n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$

2. חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 1}{3n^2 - 2n - 1}$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{n^4 - 5}$

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n}$

ד. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n}$

ה. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})$

ו. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$

ז. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n}$

ח. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$

ט. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2n} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{n^{\frac{7}{3}} - n^2}$

י. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$

יא. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$

יב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$

יג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ מצא גם את החסם עליון ל $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

יד. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2}$

טו. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2n}{n^2 + 5}\right)^{\frac{n^2 + 9}{n}}$

3. בדוק התכנסות או התבדרות של הסדרות הבאות: (הוכח את תשובתך)

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n)$

ב. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ כאשר $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

4. הוכח כי לכל $n \geq 6$ מתקיים $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$

5. הוכח או הפוך את הטענות הבאות: (בכל הסעיפים $a \in \mathbb{R}$ ו $a_n \in \mathbb{R}$ לכל $n \in \mathbb{N}$)

א. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$

ב. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Leftarrow |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$

ג. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftarrow |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ד. $a_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^2 \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

ה. $a_n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^3 \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$