אופרטורים דיפרנציאליים

כל המושגים שנגדיר יסומנו באמצעות אופרטור נַבְּלָה $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})$ נַבְּלָה

גרדיאנט

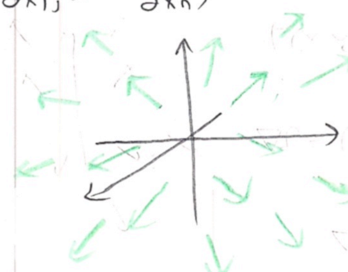
גרדיאנט של פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הוא שדה וקטורי $\text{grad} f=\nabla f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$$

<u>דוגמא</u> - $f(\vec{r})=r \rightsquigarrow f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

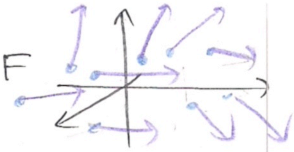
$$\nabla f=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\nabla f(\vec{r})=\frac{\vec{r}}{r}$$



דיברגנץ

F



div F

דיברגנץ (Divergence) של שדה וקטורי $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ הוא

הוא שדה סקלרי $\text{div} F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הנתון ע"י

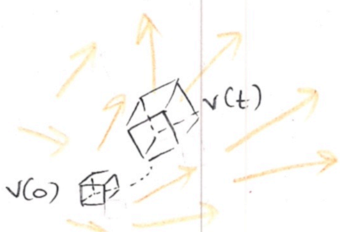
$$\text{div}(F)=\nabla\circ F=(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n})(F_1,\dots,F_n)=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\dots+\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

<u>דוגמא</u> -

חשב את $\text{div} F$ עבור $F(x,y,z)=x^2y\hat{i}+z\cdot\hat{j}+xyz\cdot\hat{k}$

$$\text{div} F=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial y}(z)+\frac{\partial}{\partial z}(xyz)=2xy+0+xy=3xy$$

מהי משמעות הדיברגנץ?



אם נתייחס ל-F כשדה מהירות של תנועת נוזל/גז נוכל לפרש את הדיברגנץ כסקלר המודד בכל נקודה את מידת "ההתפשטות" של הנוזל/גז תחת הזרם.

באופן פורמלי יותר

$$\text{div} F(x)=\frac{1}{V(0)}\frac{d}{dt}(V(t))\Big|_{t=0}$$

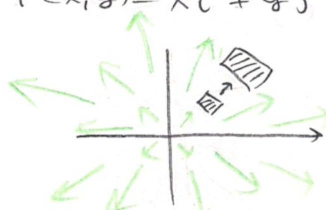
$V(0)$ - נפח קובייה שמרכזה ב-x

$V(t)$ - נפח הקובייה המשתנה לאורך תנועתה בזרם.

עבור קובייה אינפיניטסימלית V.

דוגמאות:

① $F(x,y)=x\hat{i}+y\hat{j}$

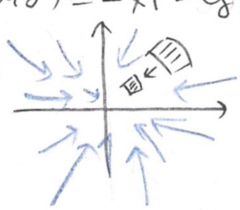


באופן אינטואיטיבי - הנוזל "מתפשט" ("יש "ברז")

$\text{div} F=1+1=2>0$

כאשר $\text{div} F(x)>0$ הנוזל מתפשט בנק' x ⇐ יש "ברז" ב-x

② $F(x,y)=-x\hat{i}-y\hat{j}$

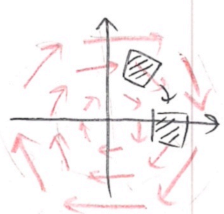


הנוזל "מתכווץ" - ("חור ניקוז")

$\text{div} F=-2$

כאשר $\text{div} F(x)<0$ הנוזל "מתכווץ" בנק' x ("יש "חור ניקוז")

③ $F(x,y)=y\hat{i}-x\hat{j}$



$\text{div} F=0+0=0$

$\text{div} F=0$

↓

הנוזל לא מתכווץ ולא מתפשט.

רוטור (rotor) או קרל (Curl) (רק ב $\mathbb{R}^3$!)

עבור שדה וקטורי $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ "רוטור" הוא שדה וקטורי $\text{rot}F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

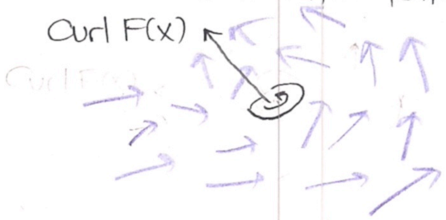
$$\text{rot}F=\text{Curl}F=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat i-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat j+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\hat k$$

דוגמא - חשב את הוקטור רוטור $F(x,y,z)=xy\hat i+\sin z\hat j+\hat k$

$$\text{rot}F=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy & \sin z & 1\end{vmatrix}=(0-\cos z)\hat i-(0-0)\hat j+(0-x)\hat k=-\cos z\hat i-x\hat k$$

מהי המשמעות של Curl F?

הוקטור $\text{Curl}F(x)$ מעיד על "מידת הסיבוב" של השדה F באופן מקומי ב-x

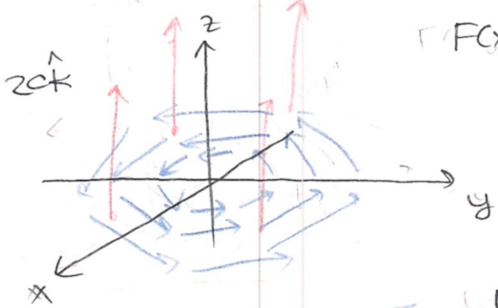


כיוון הוקטור $\text{Curl}F(x)$ מעיד על ציר הסיבוב

גודלו $|\text{Curl}F(x)|$ שווה לפי 2 מהמהירות הזוויתית של הסיבוב

דוגמאות:

① סיבוב במהירות קבועה c ← $F(x,y)=-cy\hat i+cx\hat j$

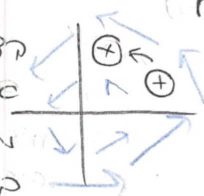


כאשר מחשבים rot חייבים להתייחס לשדה ב $\mathbb{R}^3$

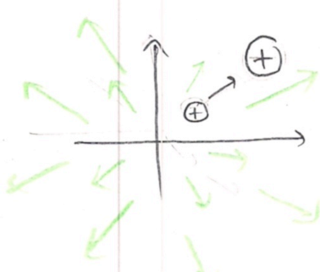
$F(x,y,z)=-cy\hat i+cx\hat j+0\hat k$

$$\text{rot}F=\begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -cy & cx & 0\end{vmatrix}=(0-0)\hat i-(0-0)\hat j+(c+c)\hat k=2c\hat k$$

דיסקית נעה סביב 0
זה לא מה ש Curl
מודד זה את הסיבוב
ביחס לעצמה!



② תנועה ללא סיבוב כלל ← $F(x,y)=x\hat i+y\hat j$



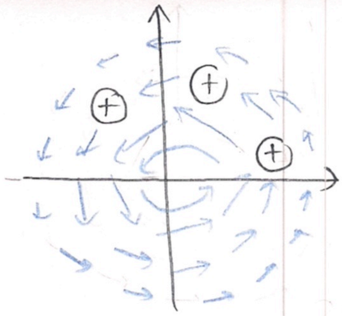
$F(x,y,z)=x\hat i+y\hat j+0\hat k$

$$\text{Curl}F=\begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & 0\end{vmatrix}=(0-0)\hat k=0$$

↓

מידת הסיבוביות $=0$

אם $\text{Curl}F=0$ בנק' אז דיסקית קטנה שמונחת על הזרם באותה הנקודה לא מסתובבת סביב צירה.



③ $$F(x,y)=-\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{M}\hat{i}+\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{N}\hat{j}$$

$$\mathrm{rot}F=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}=\left(\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\hat{k}=0$$

$\mathrm{Curl}\,F=0$ למרות שמדובר בתנועה סיבובית סביב 0 ← איך ייתכן?

משום ש-rot מודד "עירבוליות מקומית" ואכן, אם נניח דיסקית בנקודה מסויימת היא אומנם תסתובב סביב 0 אך לא סביב צירה.

זהויות שמקשרות בין grad, div, rot

① $\mathrm{Curl}(\nabla f)=0$ ("ערבוליות" של שדה גרדיאנטי תמיד שווה 0)

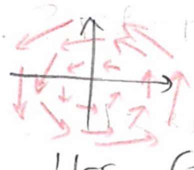
F נקרא **שדה פוטנציאלי** אם קיימת f כך ש $\nabla f=F$. במקרה זה f נקרא **פוטנציאל**

דוגמא $F=\frac{\vec{r}}{r}$ הוא שדה פוטנציאלי! $f=r$ הפוטנציאל שלו.

...מור שדה ווקטורי כלשהו F — כיצד נדע אם יש לו פוטנציאל $\nabla f=F$?

זהות ① חשובה משום שהיא מהווה תנאי הכרחי לקיום פוטנציאל.

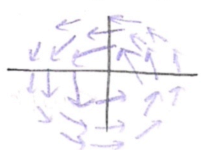
אם $\mathrm{Curl}\,F\neq 0$ ← F לא שדה פוטנציאלי.



דוגמא- $F(x,y)=y\hat{i}-x\hat{j}$ ← $\mathrm{Curl}\,F=2\hat{k}$ ← F לא פוטנציאלי

האם $\mathrm{Curl}\,F=0$ מבטיח ש-F פוטנציאלי? (האם זה תנאי מספיק?) לא!

בהמשך נוכיח שלא ייתכן! כי $\nabla f=F$



דוגמא- $F(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$! $\mathrm{Curl}\,F=0$

② $\mathrm{div}(\mathrm{Curl}\,F)=0$

הוכחה:

$$\nabla\cdot(\nabla\times F)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial y}\underset{\text{בגלל שוויון נגזרות חלקיות}}{=}0$$

לפלסיאן של פונקציה $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ הוא שדה סקלרי $\Delta f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$

המוגדר ע"י

$$\Delta f=\nabla^2 f=\nabla\cdot(\nabla f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

③ $\nabla^2(fg)=f\nabla^2 g+g\nabla^2 f+2(\nabla f\cdot\nabla g)$

$$\frac{\partial^2(fg)}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}g+f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}g+\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}+f\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2(fg)}{\partial x_i^2}=\left(\sum_{i=1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)g+f\cdot\left(\sum_{i=1}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right)+2\left(\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=\nabla^2 f g+f\nabla^2 g+2\nabla f\cdot\nabla g$$