ק"ס

פיתרון תרגיל 7 באלגברה לינארית

(א). על-פי הנתון A היא מטריצה מסדר 5 (כמעלת הפולינום האופייני שלה), המקיימת $(A-5I)^4=O$ אך $(A-5I)^3\neq O$, ולכן $A-5I$ היא מטריצה נילפוטנטית מאינדקס 4. לכן קיימת מטריצה רגולרית P כך ש-

$$P^{-1}(A-5I)P = \begin{pmatrix} J_4 & \\ & J_1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$P^{-1}AP = 5I + \begin{pmatrix} J_4 & \\ & J_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_4+5I_4 & \\ & J_1+5I_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_4(5) & \\ & J_1(5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & \\ & 5 & 1 & 0 & \\ & & 5 & 1 & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}$$

זוהי מטריצת ז'ורדן הדומה ל-A.

(ב). על-פי הנתון, $(A-\lambda I)^s=O$ אך $(A-\lambda I)^{s-1}\neq O$, ולכן $A-\lambda I$ היא מטריצה נילפוטנטית מאינדקס s. הבלוק הגדול ביותר בצורת ז'ורדן של $A-\lambda I$ הוא $J_s(0)$, ולכן הבלוק הגדול ביותר בצורת ז'ורדן של A הוא:

$$\lambda I_s + J_s(0) = J_s(\lambda)$$

על-פי טענה ..., מספר בלוקי ז'ורדן בצורת ז'ורדן של $A-\lambda I$ הוא:

$$(1) \qquad k = n-\rho(A-\lambda I)$$

אולם זהו גם מספר בלוקי ז'ורדן בצורת ז'ורדן של מטריצה A ומכאן נובעת הטענה.

נעיר עוד כי:

$$(2) \qquad n-\rho(A-\lambda I) = \dim P$$

כאשר P הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית:

$$(A-\lambda I)\underline{x} = \underline{0}$$

או:

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

כלומר P אינו אלא התת-מרחב העצמי V_λ, ולכן הממד של P הוא הריבוב הגיאומטרי של λ. מנוסחות (1) ו-(2) נובע עתה כי:

$$k = \dim P = \dim V_\lambda = \text{הריבוב הגיאומטרי של הערך העצמי } \lambda$$

<u>*תשובה 3*</u>

א. על-פי משפט הפירוק הפרימרי עבור טרנספורמציות לינאריות, שהפולינום האופייני שלהן מתפרק לגורמים לינאריים מעל F, מתקיים:

1.

$$R^6 = W_1 \oplus W_2$$

כאשר:

$$W_1 = \mathrm{Ker}(T+I)^2 \quad , \quad W_2 = \mathrm{Ker}(T-2I)^3$$

2. הממד של W_1 שווה ל-2, והפולינום המינימלי של T_{W_1} הוא $(t+1)^2$.

3. הממד של W_2 שווה ל-4, והפולינום המינימלי של T_{W_2} הוא $(t-2)^3$.

4. אם B_i הוא בסיס כלשהו של W_i $(i=1,2)$, אז בבסיס $B = B_1 \cup B_2$ המטריצה של T מקיימת:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_{W_1}]_{B_1} & \\ & [T_{W_2}]_{B_2} \end{pmatrix}$$

על-פי משפט ועל-פי שאלה 2 , קיים בסיס B_1 של W_1, עבורו:

$$[T_{W_1}] = J_2(-1)$$

וקיים בסיס B_2 של W_2, עבורו:

$$[T_{W_1}] = \begin{pmatrix} J_3(2) & \\ & J_1(2) \end{pmatrix}$$

המשך (3):

ולכן בבסיס $B = B_1 \cup B_2$ של T,V מיוצגת על-ידי המטריצה:

$$[T] = \begin{pmatrix} J_2(-1) & & \\ & J_3(2) & \\ & & J_1(2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & & & & \\ & & 2 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 2 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

(4)

משפט

תהיינה A ו-B שתי מטריצות מעל שדה F, שהפולינום האופייני שלהן מתפרק לגורמים ליניאריים מעל F. אז A דומה ל-B אם ורק אם יש להן צורת ז'ורדן משותפת.

הוכחה

אם יש ל-A ו-B צורת ז'ורדן משותפת שנקרא לה J, הרי A ו-B דומות ל-J, ולכן A דומה ל-B. בכיוון שני נניח ש-A דומה ל-B. תהי A' צורת ז'ורדן של A ו-B' צורת ז'ורדן של B. אז המטריצות A, B, A' ו-B' דומות. A' ו-B' הן מטריצות ז'ורדן דומות ל-A, ולכן A' ו-B' שוות פרט אולי להבדל בסדר הופעת ה-G_i-ים באלכסון. לכן הן A' והן B' הן צורות ז'ורדן של A ושל B ולכן יש ל-A ול-B צורת ז'ורדן משותפת.

∎

(5)

אם הדרגה של A שווה ל-1, אז הממד של מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$ שווה ל-$n-1$ (n הוא הסדר של A), ולכן $\lambda=0$ הוא ערך עצמי של A בעל ריבוב גיאומטרי $n-1$. לכן הפולינום האופייני של A הוא:

$$P(t) = t^{n-1}(t-\alpha)$$

כאשר α סקלר כלשהו. אם $\alpha=0$ אז $P(t)=t^n$, ולכן A נילפוטנטית. אם $\alpha\neq 0$ אז הריבוב האלגברי של $\lambda=0$ הוא $n-1$, ולכן הוא מתלכד עם הריבוב הגיאומטרי של ערך עצמי זה, ומכאן ש-A לכסינה.