.1

(א) נמיר את הפולינומים $x^2, 2x+x^2, x+x^3$ לוקטורים $(0,1,0,0),(0,1,2,0),(1,0,1,0)$ נשים אותם בשורות מטריצה ונדרג אותה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3=R_3-R_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת צורה מדורגת ואין בה שורות אפסים ולכן הפולינומים הם באמת בת"ל.

(ב) נרכיב מערכת משוואות

$$ax^2 + b(2x+x^2) + c(x+x^3) = x - x^3$$

שמתרגמת ל

$$c = -1$$

$$a + b = 0$$

$$2b + c = 1$$

אפשר להמיר למטריצה ולפתור

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אבל במקרה הזה קל לראות שמתקבל $c=-1$ $b=1$ ו $a=-1$. ולכן הפולינום אכן נמצא ב span.

(ג) היות ו $\mathbb{R}_3[x]$ הוא מרחב וקטורי ממימד 4 אין סיכוי ששלושה וקטורים יפרשו אותו. כדי למצוא וקטור שצריך להוסיף לקבוצה, אפשר להסתכל על המטריצה המדורגת שקיבלנו בסעיף א

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

וממנה קל לראות שאפשר להוסיף את $e_4 = (0,0,0,1)$. כלומר את הפולינום 1 כדי לקבל בסיס.

.2

(א) לא נכון. ניקח

$$A = \{(1,0)\}, \quad B = \{(0,1)\}$$

ואז

$$A + B = \{(1,1)\}$$

נשים לב ש

$$(1,1) \in span(A + B)$$

אבל

$$(1,1) \notin span(A), \quad (1,1) \notin span(B)$$

ולכן

$$span(A + B) \neq span(A) \cup span(B)$$

(ב) לא נכון. כמו קודם

$$A = \{(1,0)\}, \quad B = \{(0,1)\}$$

ואז

$$span(A \cup B) = span(\{(1,0),(0,1)\}) = \mathbb{R}^2$$

לכן

$$(1,1) \in span(A \cup B)$$

אבל כמו בסעיף א'

$$(1,1) \notin span(A) \cup span(B)$$

ולכן

$$span(A \cup B) \neq span(A) \cup span(B)$$

(ג) נכון.

$$A \subseteq span(A) \Rightarrow A \subseteq span(A) + span(B)$$

בדומה

$$B \subseteq span(B) \Rightarrow B \subseteq span(A) + span(B)$$

לכן

$$A \cup B \subseteq span(A) + span(B)$$

היות ו $span(A \cup B)$ הוא התת מרחב הכי קטן שמכיל את $A \cup B$ מתקיים ש

$$span(A \cup B) \subseteq span(A) + span(B)$$

מצד שני,

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow span(A) \subseteq span(A \cup B)$$

ובדומה

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow span(B) \subseteq span(A \cup B)$$

היות ו $span(A \cup B)$ הוא תת מרחב, הוא סגור לחיבור ולכן

$$span(A) + span(B) \subseteq span(A \cup B)$$

כך שבסך הכל קיבלנו

$$span(A \cup B) = span(A) + span(B)$$

(ד) לא נכון. ניקח

$$A = (1,1), \quad B = (2,2)$$

ואז

$$A \cap B = \emptyset$$

ולכן

$$span(A \cap B) = span(\emptyset) = \{(0,0)\}$$

ומצד שני

$$span(A) = span(B) = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$$

ולכן

$$span(A) \cap span(B) = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$$

ומתקבל

$$span(A \cap B) = \{(0,0)\} \neq \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}\} = span(A) \cap span(B)$$

.3

(א) נשים לב ש

$$span(A) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_p\}$$

$|\mathbb{Z}_p| = p$ ולכן יש לנו p אפשרויות בשביל לבחור כל אחד מבין $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. בסך הכל, יש לנו p^n צירופים לינאריים של הקבוצה $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
נותר להוכיח, שכל הצירופים הלינאריים האלה שונים. כלומר, נניח שאנחנו בוחרים שני צירופים לינאריים

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

אנחנו טוענים שאם

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

אז

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \neq \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

הוכחה: נניח בשלילה ש

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

אזי

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$$

היות ו $v_1, v_2, \ldots, v_n$ בלתי תלויה לינארית, בהכרח מתקיים

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

כלומר

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$$

בסתירה להנחה. לכן, כל אחד מבין p^n הצירופים הלינאריים שווה לוקטור אחר ו $|span(A)| = p^n$.

(ב) לא נכון. ניקח

$$A = \{0\}$$

ואז

$$|span(A)| = |\{0\}| = 1 \neq p = p^1$$

(ג) חייב להיות אינסופי.
היות ו $char(\mathbb{F}) = 0$, $\mathbb{F}$ הוא שדה אינסופי. נבחר אינסוף איברים שונים מתוך $\mathbb{F}$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$$

היות ו $A \neq \emptyset, \{0\}$ קיים $v \in A$ כך ש $v \neq 0$
אנו טוענים ש

$$\alpha_1 v, \alpha_2 v, \dots, \alpha_k v, \dots$$

הם אינסוף איברים שונים ב $span(A)$ ולכן $span(A)$ אינסופי.
הוכחה: נניח בשלילה שהם לא שונים כלומר קיימים i, j כך ש $\alpha_i v = \alpha_j v$ כלומר

$$(\alpha_i - \alpha_j)v = 0$$

היות ו $v \neq 0$ חייב להיות ש

$$\alpha_i - \alpha_j = 0_{\mathbb{F}}$$

ולכן

$$\alpha_i = \alpha_j$$

בסתירה להנחה ש

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$$

הם איברים שונים.
ולכן $span(A)$ אינסופית.

.4

(א) לא נכון.
ניקח

$$B_1 = \{(1,1)\}, \quad B_2 = \{(2,2)\}$$

קל לראות ש

$$B_1 \cup B_2$$

היא קבוצה תלויה לינארית ולכן היא לא בסיס.

(ב) לא נכון.
ניקח

$$B_1 = \{(1,0)\}, \quad B_2 = \{(0,1)\}$$

ואז

$$U = span(\{(1,0)\}), \quad W = span(\{(0,1)\})$$

ו

$$B_1 \cup B_2 = \{(1,0),(0,1)\}$$

הוא אכן בסיס עבור

$$U + W = \mathbb{R}^2$$

(ג) נכון.
הוכחה: נוכיח שהקבוצה היא פורשת ובלתי תלויה לינארית.
פורשת: נכתוב

$$B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}, \quad B_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$$

אם $x \in U + W$ אז

$$x = u + w, \quad u \in U, \quad w \in W$$

היות ו B_1 פורש את U ו B_2 פורש את W קיימים

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathbb{F}$$

כך ש

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k, \quad w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_r w_r$$

ולכן

$$x = u + w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_r w_r$$

לכן $B_1 \cup B_2$ אכן פורשת את $U + W$ (שים לב שלא נזדקקנו כאן להנחה ש $U \cap W = \{0\}$)
בלתי תלויים לינארית: נניח ש

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_r w_r = 0$$

אז

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = -\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \ldots - \beta_r w_r$$

אבל

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k \in U, \quad -\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \ldots - \beta_r w_r \in W$$

והיות ו $U \cap W = \emptyset$ נקבל ש

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0$$
$$-\beta_1 w_1 - \beta_2 w_2 - \ldots - \beta_r w_r = 0$$

היות ו B_1, B_2 קבוצות בלתי תלויות מתקבל ש

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$$

שזה מה שרצינו להוכיח.
לכן הקבוצה $B_1 \cup B_2$ היא פורשת ובלתי תלויה ולכן היא בסיס עבור $U + W$
.

(ד) היות והוכחנו את ג' ברור ש ד' לא נכון.

(ה) לא נכון.
ניקח

$$B_1 = \{(1,1)\}, \quad B_2 = \{(2,2)\}$$

אז

$$U = W = span\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$$

אבל

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

אינו בסיס עבור

$$U \cap W = U$$

.

(ו) לא נכון.
ניקח $B_1 = B_2$ ולכן $U = W$ ואז ברור ש $B_1 \cap B_2 = B_1$ הוא בסיס עבור $U \cap W = U$.

5. (א) המערכת מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

מרחב הפתרונות של המטריצה הזאת שווה למרחב הפתרונות של המטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

שהגענו אליה על ידי ביצוע פעולת השורה $R_2 = R_2 - R_1$ נמצא את הפתרון הכללי של המערכת.
x_3, x_4 הם משתנים חופשיים ולכן נסמן

$$x_3 = t, \quad x_4 = s$$

לפי השורה השנייה

$$-4x_2 + 3x_3 - 1x_4 = 0 \Rightarrow -4x_2 = s - 3t \Rightarrow x_2 = \frac{3t-s}{4}$$

לפי השורה הראשונה

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4\frac{3t-s}{4} - 3t + s = 0$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$(0, \frac{3t-s}{4}, t, s)$$

במילים אחררות הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\{t(0, \frac{3}{4}, 1, 0) + s(0, -\frac{1}{4}, 0, 1) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

לכן

$$\{(0, \frac{3}{4}, 1, 0), (0, -\frac{1}{4}, 0, 1)\}$$

הוא בסיס עבור מרחב הפתרונות של המערכת והמימד הוא 2.

(ב) דרך הפתרון דומה לא'. המערכת מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

על ידי ביצוע הפעולה $R_2 = R_2 - 2R_1$ נקבל את המטריצה המדורגת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_2, x_3, x_4 הם משתנים חופשיים ולכן נסמן

$$x_2 = q, \quad x_3 = t, \quad x_4 = s$$

לפי השורה הראשונה נקבל

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4q - 3t + s$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$(4q - 3t + s, q, t, s)$$

כלומר

$$\{q(4, 1, 0, 0) + t(-3, 0, 1, 0) + s(1, 0, 0, 1) \mid q, t, s \in \mathbb{R}\}$$

ולכן בסיס למרחב הפתרונות יהיה

$$(4, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$$

והמימד הוא 3.

6. (א) בסיס עבור $\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ יהיה

$$\{(1,0,\ldots,0,0),(0,1,\ldots,0,0),\ldots,(0,0,\ldots,1,0),(0,0,\ldots,0,1)\}$$

שזו קבוצה בעלת n איברים. ולכן המימד הוא n.

(ב) בסיס עבור $\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{R}$ יהיה

$$\{(1,0,\ldots,0,0),(i,0,\ldots,0,0),(0,1,\ldots,0,0),(0,i,\ldots,0,0),\ldots$$
$$,(0,0,\ldots,1,0),(0,0,\ldots,i,0),(0,0,\ldots,0,1),(0,0,\ldots,0,i)\}$$

שזו קבוצה בעלת $2n$ איברים. ולכן המימד הוא $2n$.

7. (א) אם $c=0$ ברור שהקבוצה אינה בסיס היות והיא תלויה לינארית. נוכיח שהקבוצה היא בסיס אם $c\neq 0$.
נוכיח שהקבוצה בגודל $n=dim(V)$ ושהקבוצה היא בלתי תלויה לינארית ואז לפי משפט השלישי חינם נדע שהיא בסיס.
גודל n : נניח ש

$$cv_i = cv_j$$

אז

$$c(v_i - v_j) = 0$$

היות ו $c \neq 0$ מתקבל ש

$$v_i - v_j = 0 \Rightarrow v_i = v_j$$

בסתירה לכך ש $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ בסיס.
לכן כל האיברים בקבוצה שונים וגודלה n.
בלתי תלויה לינארית: נניח ש

$$\alpha_1 cv_1 + \alpha_2 cv_2 + \ldots + \alpha_n cv_n$$

היות ו

$$B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$$

בלתי תלוי לינארית מתקבל כי

$$\alpha_1 c = \alpha_2 c = \ldots = \alpha_n c = 0$$

והיות ו $c \neq 0$ מתקבל כי

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

ולכן הקבוצה היא בלתי תלויה לינארית
לפי משפט השלישי חינם היא בסיס.

(ב) אם $\alpha = -1$ האיבר הראשון בקבוצה יהיה 0 ולכן היא בוודאי לא תהיה בסיס.
נוכיח כי עבור כל $\alpha \neq -1$ הקבוצה הזאת היא בסיס. נוכיח שבקבוצה יש n איברים ושהיא בלתי תלויה לינארית.
גודל n : נניח בשלילה ש

$$v_i + \alpha v_1 = v_j + \alpha v_1$$

אזי

$$v_i = v_j$$

בסתירה לכך ש $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ היא בסיס.
בלתי תלויה לינארית: נניח ש

$$\alpha_1(v_1 + \alpha v_1) + \alpha_2(v_2 + \alpha v_1) + \ldots + \alpha_n(v_n + \alpha v_1) = 0$$

כלומר

$$(\alpha_1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n))v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

היות ו $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ בלתי תלויה לינארית נקבל ש

$$\alpha_1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_n = 0$$

כלומר נותר להוכיח רק עוד

$$\alpha_1 = 0$$

אבל

$$\alpha_1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \alpha_1 + \alpha\alpha_1 = (1 + \alpha)\alpha_1$$

היות ו $\alpha \neq -1$ נקבל ש $\alpha_1 = 0$ ולכן הקבוצה גם בלתי תלויה לינארית לפי משפט השלישי חינם נקבל שהיא בסיס.

8. נוכיח את סעיף ב' ולכן ממילא א' לא נכון
היות ונתון

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

נקבל ש

$$v_3 = -v_1 - v_2$$

כלומר

$$v_3 \in span(v_1, v_2)$$

לכן

$$span(v_3) \subseteq span(v_1, v_2) = span(v_1) + span(v_2)$$

כלומר

$$span(v_1) + span(v_2) + span(v_3) = span(v_1) + span(v_2) = span(v_1, v_2)$$

המימד של

$$span(v_1, v_2)$$

הוא לכל היותר 2 כי הוא נפרש על ידי שני וקטורים. לכן לא ייתכן כי

$$span(v_1, v_2) = V$$

כי V הוא מרחב וקטורי ממימד 3.

.9

(א) היות ו $A^{k-1} \neq 0$ אז בוודאי יש לה עמודה שאינה 0 כלומר יש i שבשבילו $C_i(A^{k-1}) \neq 0$ ולכן אפשר לבחור $v = e_i$ ואז

$$Ae_i = C_i(A^{k-1}) \neq 0$$

(ב) נסתכל על צירוף לינארי

$$\alpha_0 v + \ldots + \alpha_{k-1} A^{k-1} v = 0$$

נכפול את הצירוף משמאל במטריצה A^{k-1}. היות ו $A^k = 0$ נקבל שנישאר עם

$$\alpha_0 A^{k-1} v = 0$$

וזה מכריח ש $\alpha_0 = 0$. לכן הצירוף הוא בעצם

$$\alpha_1 Av + \ldots + \alpha_{k-1} A^{k-1} v = 0$$

עכשיו אפשר לכפול ב A^{k-2} משמאל ולהגיע למסקנה ש $\alpha_1 = 0$ וכן הלאה עד שמראים שכל המקדמים הם 0.

(ג) נניח ש $A^n \neq 0$. כלומר $k > n$ אבל אז $\{v, Av, \ldots A^{k-1}v\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית עם k איברים. כלומר קבוצה בת"ל עם יותר מ n איברים. בסתירה לכך שהמימד של $\mathbb{F}^n$ הוא n.