

## פיסיקה למתמטיקאים

### תרגיל 4: חוקי שימור, משוואות המילטון וסוגרי פואסון

1. הלגרנג'יאן של גוף בעל מסה  $m$  עם פוטנציאל  $U(r) = -GMm/r$  נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.

האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת? מדוע?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת

$$x \rightarrow x + \epsilon y, \quad y \rightarrow y - \epsilon x$$

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמציה הסיבוב. מהי שמורה זו?

2. הוכיחו כי שני לגראנג'יאנים  $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$  הנבדלים זה מזה בנגזרת שלמה של פונקציה של הקורדינטות והזמן  $f(\vec{q}, t)$ , כלומר  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\vec{q}, t)/dt$ , שומרים על משוואות התנועה.

(הדרכה: הוכיחו כי  $\delta S' = \delta S + o(\epsilon)$ , כאשר  $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt$  הפעולה המתאימה ל  $\mathcal{L}'$  כאשר עושים וארציה  $f(\vec{q} + \epsilon \vec{\eta}, t) - f(\vec{q}, t)$  ו  $\vec{\eta}$  פונקציה שרירותית המתאפסת על השפה, כלומר  $\vec{\eta}(t_1) = \vec{\eta}(t_2) = 0$ . הסיקו מכך כי משוואות התנועה נשמרות).

3. מטוטלת מתמטית (מסה  $m$  בקצה חוט באורך  $\ell$ ) מחוברת לתקרת מעלית הנעה במהירות קבועה  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{y}$  ביחס למעבדה.

(א) קבלו את הלגרנג'יאן במעלית  $\mathcal{L}$  ובמעבדה  $\mathcal{L}'$  (רשמו את הפוטנציאלים ביחס לנקודת שווי המשקל של המטוטלת) והראו כי

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\theta, t)/dt$$

$$f(\theta, t) = -mv_0 \ell \cos \theta - \frac{1}{2}mgv_0 t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 t^2$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה עבור  $\mathcal{L}$  ו  $\mathcal{L}'$  וודאו כי הן אכן זהות.

4. הלגרנג'יאן של חלקיק חפשי בקורדינטות פאראבוליות  $(\xi, \eta, \phi)$  נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\xi^2 + \eta^2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}m\xi^2\eta^2\dot{\phi}^2$$

(א) מצאו את התנעים הצמודים  $(p_\xi, p_\eta, p_\phi)$ .

(ב) מצאו את ההמילטוניאן.

5. נגדיר את סוגרי פואסון של שתי פונקציות

להיות  $f(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$ ,  $g(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

(א) הוכיחו כי  $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$  כאשר  $\mathcal{H}$  ההמילטוניאן של המערכת

(ב) רשמו את ההמילטוניאן משאלה 1 בקואורדינטות קרטזיות והראו כי השמורה

$$\{f, \mathcal{H}\} = 0$$

(ג) הכלילו את תוצאת 5 לפוטנציאל כלשהוא מהצורה

$$U(x, y) = U(x^2 + y^2)$$

6. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( x + i \frac{p}{m\omega} \right), \quad a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( x - i \frac{p}{m\omega} \right)$$

(א) בטאו את  $\mathcal{H}$  באמצעות  $a, a^*$ .

(ב) חשבו את סוגרי פואסון  $\{a, a^*\}$ ,  $\{a, \mathcal{H}\}$ ,  $\{a^*, \mathcal{H}\}$ .

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור  $a, a^*$  ופתרו אותן.

(ד) בטאו את  $x, p$  באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את  $\{x, p\}$  ע"י שימוש בתוצאות 6ד. השוו לחישוב הישיר.