<u>פיתרון</u>

<u>תשובה 1:</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5)(2\ 7\ 9\ 8)(4)(6\ \ 10)$$

לכן $\sigma = (1\ 5)(1\ 3)(2\ 8)(2\ 9)(2\ 7)(6\ 10)$

את שני החילופים הראשונים קיבלנו מהמחזור הראשון את שלושת הבאים מהמחזור השני לפי הטכניקה שלמדנו בכיתה בה לוקחים את האיבר הראשון במחזור כאיבר שמאפשר "חילחול" בחילופים.
קיבלנו, אם כן, מספר זוגי של חילופים לכן התמורה זוגית.

<u>תשובה 2:</u>

א. $a = (1\,2\,5)(3\,7)(4\,6)$, הסדר הוא $\mathrm{lcm}(3,2,2) = 6$.
ב. $\mathrm{sgn}(a) = 1\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$ ולכן $a \in A_7$.
ג. $a^{13} = (a^6)^2 a = a$ ולכן הסדר של a^{13} הוא כסדר של a שהוא 6.
ד. $bab - 1 = (b(1)\ b(2)\ b(5))(b(3)\ b(7))(b(4)\ b(6)) = (5\,2\,7)(3\,6)(4\,1)$

<u>תשובה 3:</u>

2. שימו לב שצריך להוכיח ראשית ש-V היא תת חבורה נורמלית ב-A_4. V מוכלת ב- A_4 והיא תת-חבורה (הראו זאת!). היא נורמלית ב- S_4 (ובפרט ב - A_4-) כי היא מכילה את כל התמורות מהצורה (_ _)(_ _). עתה, לפי לגרנז': $|A4/V| = |A4|/|V| = 12/4 = 3$. כל תת-חבורה מסדר ראשוני p איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_p$ ולכן A4/V איזומורפית ל- Z_3, ולכן ציקלית.

<u>תשובה 4:</u>

א) ראשית – נשים לב ש- n>3. נבחר ראשית שני מספרים a, b מתוך n המספרים וניצור מהם חילוף. יש $\binom{n}{2}$ אפשרויות לעשות כך. לאחר מכן נבחר עוד שני מספרים c, d מתוך n-2 המספרים <u>שנותרו</u> וניצור מהם חילוף – ויש $\binom{n-2}{2}$ אפשרויות לעשות כך.

אבל (a b)(c d) = (c d)(a b) ולכן מספר התמורות מהצורה המבוקשת הינו $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.

ב) נסתכל על כל תמורה בהצגתה כמכפלת מחזורים זרים-
<u>מקרה ראשון</u> : $x = id$
<u>מקרה שני</u> : x מחזור באורך 3

בחירה של 3 איברים עם חשיבות לסדר מודולו סיבוב : $\binom{10}{3}\cdot 2 = \frac{10!}{7!}\Big/\frac{3!}{2} = \frac{(10\cdot9\cdot8)}{3}$

דרך נוספת להסתכל על זה :
$\binom{10}{3}$ אפשרויות לבחירת שלשת מספרים כשלכל צירוף (שלשה) יש $2 = \frac{3!}{3}$ אפשרויות לסידור בסדר מחזורי.

<u>מקרה שלישי</u>: כאשר x מבוטא כמכפלת שני מחזורים זרים באורך 3
ולזה יש $\frac{1}{2!}\binom{10}{3}\cdot 2\cdot\binom{7}{3}\cdot 2$ תמורות כאלו ב-S_{10}.

הסבר: $\binom{10}{3}$ אפשרויות לשלשת המספרים הנבחרת למחזור הזר האחד לאחר בחירתו נשאר לבחור שלשה מתוך 7 המספרים הנותרים למחזור השני ולזה יש $\binom{7}{3}$ שלשות אפשריות. שתי ההכפלות ב- 2 נובעות מהמקרה הקודם. לבסוף מחלקים ב-$2!$ בגלל שאין חשיבות לסדר בחירת התמורות (אין חשיבות לסדר כתיבתן לכן סה"כ $\binom{10}{3}\binom{7}{3}\cdot 2$

<u>מקרה רביעי</u> x מבוטא כמכפלת שלושה מחזורים זרים באורך 3
בדומה לשיקולים קודמים יש $\frac{1}{3!}\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{3}2^3$ תמורות כאלו ב-S_{10}.

ולכן בסה"כ יש $1+2\binom{10}{3}+\ \binom{10}{3}\binom{7}{3}2+\frac{1}{3!}\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{3}2^3$ תמורות המקיימות $\mathrm{x}^3=\mathrm{Id}$ ב-S_{10}.

<u>תשובה 5:</u>

ראשית נציין שכל תמורה ב S_n ניתנת להצגה כמספר סופי של מחזורים זרים. שנית נציין שמחזורים זרים מתחלפים תחת הפעולה שהגדרנו בכיתה (כפי שהוכחנו). שלישית, בהינתן מחזור עם k איברים (מחזור מסדר k) סדר התמורה שאותה הוא מייצג היא k. ניתן להמחיש זאת באופן הבא: נסתכל על איבר מסויים, נאמר הראשון משמאל,במחזור $\sigma=\left(a_1\,a_2\cdots a_k\right)$ אזי

$$\underbrace{\sigma\cdot\ldots\cdot\sigma}_{k}\left(a_1\right)=\underbrace{\sigma\cdot\ldots\cdot\sigma}_{k-1}\left(\sigma\left(a_1\right)\right)=\underbrace{\sigma\cdot\ldots\cdot\sigma}_{k-1}\left(a_2\right)=\underbrace{\sigma\cdot\ldots\cdot\sigma}_{k-2}\left(a_3\right)=\ldots=\sigma\left(a_n\right)=a_1$$

ב S_2 יש רק מחזורים מאורך 2 (הזהות ו-(1 2)) לכן עפ"י הרשום לעיל סדרם הוא לכל היותר 2 . ז"א אין תמורות מסדר 3.

ב S_n: ניקח תמורה כלשהי ב $\sigma\in S_n$. ניתן להציג את σ כמכפלה של מחזורים זרים. עתה, בגלל תכונת החילופיות של מחזורים הזרים , העלאת σ בחזקת k כמוה כהעלאת כל אחד מהמחזורים במכפלה בחזקת k. מאחר שאנו דורשים ש $\sigma^3=e$ וש $\sigma^2\neq e$ חייב ליהיות בפירוק מחזורים מסדר(גודל) 3 , בלבד. מספר המחזורים השונים מסדר 3 ב S_n הוא מספר האפשרויות לסידור 3 איברים מתוך קבוצה של n איברים, ללא חזרות, במעגל שהוא

$$2\cdot\binom{n}{3}=2\cdot\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

לכן ב S_3 יש 2 אברים מסדר 3 שהם $\left(1\ 2\ 3\right),\left(1\ 3\ 2\right)$, ב S_4 יש 8 איברים מסדר 3 וב S_5 יש 20. המצב מעט מסתבך ב S_6 שכן יש שם תמורות הניתנות להצגה של שני מחזורים זרים מסדר (מגודל) 3 כ"א .(מצב שאינו קיים במקרים הקודמים שכן הוא מחייב לפחות שישה איברים שונים בקבוצה עליה מתבצעת התמורה).
בשאלה 1 יש פירוק למחזור מסדר 4 מחזור מסדר 3 ומחזור מסדר 2 עמ"נ ששלושתם יהיו הזהות צריך להעלותם בחזקת 12 שהוא המספר הקטן ביותר שמתחלק ב- 3 ב- 4 וב-2 . כל חזקה קטנה יותר לא "תטפל" לפחות במחזור אחד מבינהם.

<u>תשובה 6:</u>

נתחיל במקרה ספציפי לצורך המחשה: כמה מחזורים מסדר 3 ישנם ב-S_n

לכל קבוצה של 3 איברים יש שני מחזורים אפשריים (באופן כללי לקבוצה בת n איברים ישנם $(n-1)!$ מחזורים שונים – לא משנה את מי שמים ראשון).

ולכן מס' ה מחזורים האפשריים מסדר 3 הוא: $\dfrac{n!}{3(n-3)!}=\dfrac{2n!}{3!(n-3)!}=2\cdot\dbinom{n}{3}$.

ובאופן כללי עבור מחזורים מסדר r :

$$\binom{n}{r}\cdot(r-1)! = \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot(r-1)! = \frac{n!}{r\cdot(n-r)!}$$

תשובה 8:

ניקח תמורה מסדר 45 והיא תיצור לנו תת-חבורה מסדר 45.

כיוון שלא יתכן מחזור באורך 45 ב- S_{15}, ניקח תמורה שהיא מכפלה של שני מחזורים זרים מסדר

9 ו-5. כיוון ש5 ו-9 הם זרים, אז הכמק״ב שלהם שווה למכפלתם וזהו גם סדר התמורה.

לדוגמה : $H = <\sigma> = <(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14)>$

$$|H| = |\sigma| = [9,5] = 45$$

תשובה 9:

נגדיר פונקציה $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}\varphi(x)$. אם $f(x) = f(y)$ אזי $x^{-1}\varphi(x) = y^{-1}\varphi(y)$, כלומר $xy^{-1} = \varphi(x)\varphi(y)^{-1}$ אך מכאן נקבל, $\varphi(xy^{-1}) = xy^{-1}$ ולפי התכונה של φ, $xy^{-1} = 1$, כלומר $x = y$. ראינו ש־f חד חד ערכית ומכיוון ש־G סופית f על, כלומר לכל $y \in G$ קיים $x \in G$ כך

ש־$x^{-1}\varphi(x) = y$. מכאן,

$\varphi(y) = \varphi(x^{-1}\varphi(x)) = \varphi(x)^{-1}\varphi^2(x) = \varphi(x)^{-1}x = y^{-1}$ (לכל $y \in G$).

לכל $x, y \in G$ מתקיים

$xy = (x^{-1})^{-1}(y^{-1})^{-1} = \varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1}) = \varphi(x^{-1}y^{-1}) = \varphi((yx)^{-1}) = ((yx)^{-1})^{-1} = yx$.

תשובה 10:

נגדיר $S = \{a \in G | \varphi(a) = a^{-1}\}$.

נשים לב שאם $x \in S$, אזי $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = x$, לכן $x^{-1} \in S$.

יהי $S \ni s$ כלשהו, נגדיר שלוש קבוצות: $T = \{t|t, st \in S\}$, $T_1 = \{t|t \notin S\}$, $T_2 = \{t|st \notin S\}$.

$T = G \setminus (T_1 \cup T_2)$, לכן $|T| = |G| - |T_1| - |T_2| + |T_1 \cap T_2|$, כלומר $|T| > |G| - \frac{3}{4}|G| - \frac{3}{4}|G| = \frac{|G|}{2}$.

איבר היחידה $e \in T$, מכיוון שגם e וגם $se = s \in S$.

אם $t \in T$, אזי

$st = ((st)^{-1})^-1 = \varphi((st)^{-1} = \varphi(t^{-1}s^{-1}) = \varphi(t^{-1})\varphi(s^{-1}) = ts$, כלומר $t \in C_G(s)$. מכיוון ש-$T \subseteq C_G(s)$ וגם $C_G(s)$ תת חבורה של G וגם $|T| > \frac{|G|}{2}$, בהכרח $C_G(s) = G$, כלומר $s \in Z(G)$.

זה נכון לכל $s \in S$, כלומר $|Z(G)| > \frac{3|G|}{4}$, לכן $Z(G) = G$, או במלים אחרות, G אבלית.

מכאן, לכל $s, t \in S$, נקבל $\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t) = s^{-1}t^{-1} = t^{-1}s^{-1} = (st)^{-1}$, כלומר S סגורה תחת כפל, ולכן היא תת חבורה של G, ומכיוון שגודלה גדול מחצי גודל G, $S = G$, וזה מה שרצינו לנוכיח.

<u>תשובה 11:</u>

נגדיר העתקה $\varphi : D_n \to S_n$. שימו לב: D_n נוצרת ע״י שני איברים (σ, τ) לכן מספיק להגדיר את $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$. נגדיר $\varphi(\sigma) = (123...n)$ (כלומר מחזור מסדר n) ו-$\varphi(\tau) = (1\,n)(2\,n-1)(3\,n-2)(4\,n-3)\cdots$ (כלומר: אם n זוגי אז מצד ימין רשומה מכפלה של $\frac{n}{2}$ חילופים זרים, ואם n אי-זוגי אז מצד ימין רשומה מכפלה של $\frac{n-1}{2}$ חילופים זרים). φ מונומורפיזם, לכן D_n איזומורפית ל-$\operatorname{Im}\varphi$; כמו כן ראינו כי התמונה של כל הומומורפיזם היא תת-חבורה של הטווח, ובכך קיבלנו את הדרוש.