

שיעורי בית 4

12 בנובמבר 2015

1. כמה כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ (עם פעולת מדולו 6 או כפי שלמדנו עם פעולה $[a] + [b] = [a + b]$?)

2. יהיו G_1, G_2 חבורות הוכח/הפרך:

(א) אם $G_1 \times G_2$ ציקלית אז גם G_2 וגם G_1 ציקלית.

(ב) אם G_1 וגם G_2 ציקליות אז $G_1 \times G_2$ ציקלית.

3. תהא G חבורה סופית. יהיו $a, b \in G$. הוכח/הפרך

(א) אם a, b מתחלפים אז $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$

(ב) $\langle a \rangle = \langle a^3 \rangle$

(ג) אם $b = a^4$ אזי $\langle ab \rangle \subseteq \langle a \rangle$

(ד) $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$

4. הוכח כי החבורות הבאות אינן ציקליות

(א) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(ב) \mathbb{Q}

5. תהא G חבורה. $g \in G$. נניח כי $g^k = e$. הוכח כי

$$o(g) | k$$

כלומר הסדר של g מחלק את k .

הדרכה: בצע חילוק עם שארית של k ב $o(g)$

6. תהא G חבורה חילופית. יהיו $a, b \in G$ בעלי סדרים זרים. כלומר, נסמן $o(a) = m$ ו $o(b) = n$, אזי $\gcd(m, n) = 1$ (ל n, m אין מחלק משותף פרט ל-1). הוכח כי

$$o(ab) = m \cdot n$$

היעזר בתרגיל מספר 5