פתרון מועד ב' בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

קורס מס' 83114 תשע"ז, סמסטר ב'

שאלה 1. הצג את המספרים הבאים כ(סכומים של) טורי מספרים רציונליים:

א. $\sqrt{2}$ (10 נק') ב. π (15 נק').

פתרון:

א. נפתח את הפונקציה $f(x)=\sqrt{1+x}$ לטור מקלורן. נרשום:

$$f(0)=1,\ f'(0)=\left.\frac{1}{2(1+x)^{1/2}}\right|_{x=0}=\frac{1}{2},f''(0)=\left.\frac{-1}{2^2(1+x)^{3/2}}\right|_{x=0}=-\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(0)=\left.\frac{1\cdot 3}{2^3(1+x)^{5/2}}\right|_{x=0}=\frac{1\cdot 3}{8},\ f^{(4)}(0)=\left.\frac{-1\cdot 3\cdot 5}{2^4(1+x)^{7/2}}\right|_{x=0}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{16}$$

לכן: $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k\cdot k!}x^k$ (הנגזרות חסומות במשותף בכל $[-r,r]$ ע"י 1).

נותר להציב $x=1$ ולקבל: $\sqrt{2}=\frac{3}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k\cdot k!}$.

ב. אם בטור הגיאומטרי $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ נציב: $x=-t^2$ נקבל: $\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}$.

הטור הזה מתכנס נקודתית ב-$[0,1)$, לכן במ"ש בקטע $[0,x]$ לכל $0<x<1$, מה שמאפשר את שינוי סדר האופרטורים שם:

$$\forall 0<x<1:\ \arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\right)dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^x t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

טור החזקות שקיבלנו מתכנס גם בנקודה $x=1$ (טור לייבניץ), לכן הוא מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$ (משפט), לפיכך פונקצית הסכום רציפה משמאל בנקודה $x=1$, ומכאן ש:

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\lim_{x\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

כעת נותר להכפיל ב-4 ולקבל את הדרוש.

שאלה 2.

א. גיא גולש על הר מכוסה בשלג. מעטפת ההר היא משטח חלק הנתון ע"י $F(x,y,z)=0$ כך ש: $F_z\neq 0$.
באיזה כיוון במרחב, מהנקודה $P=(x_0,y_0,z_0)$, גיא יגלוש באופן הכי תלול (ביחס לציר z)? (10 נק').

ב. היעזר בדיפרנציאל מסדר ראשון של פונקציה $f(x,y)$ כדי להעריך בקירוב את: $\sqrt[4]{15.1+(0.99)^2}$ (15 נק').

פתרון:

א. כיוון ש-$F_z \neq 0$, $F(x,y,z)=0$ מגדיר פונקציה $z=f(x,y)$ המתארת את המשטח בסביבה של $P=(x_0,y_0,z_0)$. הכיוון בו גיא יגלוש באופן הכי תלול הוא $\nabla f_{(x_0,y_0)}=\left(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\right)$ ששווה עפ"י משפט הפונקציות הסתומות ל: $\left(-\frac{F_x(P)}{F_z(P)},-\frac{F_y(P)}{F_z(P)}\right)$. הגלישה היא על המישור המשיק למשטח בנקודה P (שמוגדר היטב כיוון שהמשטח חלק) כלומר במאונך לנורמל $\vec{n}=\nabla F_{(P)}$, לכן כיוון זה מקיים:

$$\left(-\frac{F_x(P)}{F_z(P)},-\frac{F_y(P)}{F_z(P)},Q\right)\bullet\left(F_x(P),F_y(P),F_z(P)\right)=0 \Rightarrow Q=\frac{F_x^2(P)+F_y^2(P)}{F_z^2(P)}$$

ובסה"כ הכיוון במרחב הוא: $\left(\frac{F_x(P)}{F_z(P)},\frac{F_y(P)}{F_z(P)},-\frac{F_x^2(P)+F_y^2(P)}{F_z^2(P)}\right)$ (המרכיב ה-z שלילי בהנחה שגאי <u>יורד</u> תוך כדי גלישה...).

ב. נחשב את הדיפרנציאל של הפונקציה $f(x,y)=\sqrt[4]{x+y^2}$ בנקודה הנוחה לחישוב $P_0=(15,1)$ יחד עם ההפרשים: $\Delta x=0.1,\ \Delta y=-0.01$. נקבל שם:

$$f(P_0)=\sqrt[4]{16}=2\ ,$$

$$df(P_0)=f_x(P_0)\Delta x+f_y(P_0)\Delta y=\frac{0.1}{4\left(x+y^2\right)^{3/4}}(P_0)-\frac{0.01\cdot 2y}{4\left(x+y^2\right)^{3/4}}(P_0)=\frac{10-2}{3200}=\frac{8}{3200}$$

ולכן: $\sqrt[4]{15.1+(0.99)^2}\approx\frac{6408}{3200}=2.0025$.

שאלה 3.

א. יהא משטח חלק S הנתון ע"י $z=f(x,y)$. הראה כי אם P היא נקודת קיצון מקומי על S תחת האילוץ $g(x,y)=0$, אזי: $\nabla f_{(P)} \parallel \nabla g_{(P)}$. (10 נק').

ב. מצא את המרחק המינימלי בין הפרבולה: $x^2+2xy+y^2+4y=0$ והישר: $3x-6y+4=0$.

<u>רמז</u>: מרחק הנקודה (x,y) מהישר $ax+by+c=0$ הוא: $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (15 נק').

פתרון:

א. עפ"י משפט, תנאי הכרחי לנקודה P שתהיה קיצון מותנה הוא שהיא תהיה נק' קריטית של פונקצית לגרנז': $F_\lambda(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$, כלומר: $\begin{array}{l} f_x(P)+\lambda\cdot g_x(P)=0 \\ f_y(P)+\lambda\cdot g_y(P)=0 \end{array}$ מכאן ש: $\nabla f_{(P)}=-\lambda\nabla g_{(P)}$.

ב. נחפש נקודות קיצון של הפונקציה: $f(x,y)=3x-6y+4$ על האילוץ: $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

לצורך כך נגדיר את פונקציה לגרנז': $F_\lambda(x,y)=3x-6y+4+\lambda\left(x^2+2xy+y^2+4y\right)$ ונחשב:

$$3+2\lambda x+2\lambda y=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{3}{2(x+y)},\quad -6+2\lambda x+2\lambda y+4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{6}{2(x+y)+4}$$

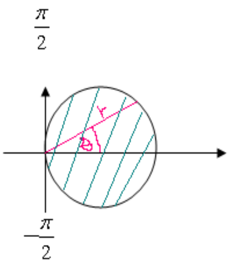
מתקבלת נקודה קריטית יחידה: $a=\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{9}\right)$ ממנה המרחק הוא: $\left.\frac{3x-6y+4}{\sqrt{9+36}}\right|_{\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{9}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

ההסיאן שם הוא: $HF_{\lambda}(x,y)=\begin{pmatrix}2\lambda & 0\\ 0 & 2\lambda\end{pmatrix}$ עם $\lambda=\frac{9}{4}>0$ לפיכך זו נקודת מינימום מקומי. כמו כן זו נק' קיצון יחידה בתחום מעגלי (האילוץ), היינו קומפקטי, לכן גלובלית.

שאלה 4. חשב את שטחו של חלק המעטפת של חצי הכדור ברדיוס a, הנחתך ע"י גליל שקוטרו מונח על רדיוס הכדור (ראה תמונה) (25 נק').

פתרון:

ההיטל של המשטח הדרוש על מישור (x,y) הוא העיגול: $D=\left\{(x-a/2)^2+y^2\le a^2/4\right\}=\left\{x^2+y^2\le ax\right\}$,



ובקורדינטות קוטביות: $D'=\left\{\begin{matrix}0\le r\le a\cos\theta\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$. מעטפת הכדור מתוארת ע"י: $S=\left\{x^2+y^2+z^2-a^2=0\right\}$ עם גורם ההיטל: $\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

משיקולי סימטריה נחשב את האינטגרל רק עבור: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ונכפיל ב-2. נקבל:

$$\iint_{D'} r\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta=2a\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=-2a\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$$

$$=-2a\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=-2a\int_0^{\pi/2}\left[\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}-a\right]d\theta=-2a^2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta-1)d\theta$$

$$=-2a^2(-\cos\theta-\theta)\Big|_0^{\pi/2}=2a^2(\cos\theta+\theta)\Big|_0^{\pi/2}=2a^2(\pi/2+(0-1))=a^2(\pi-2)$$

שאלה 5. חשב את שטף השדה $A=\left(x^2+y^2,z^2-2xy,x-y\right)$ דרך המשטח הפתוח: $S=\left\{0\le y=4-x^2-z^2\right\}$ כאשר הנורמל עליו פונה לכיוון החיובי של ציר ה- y (25 נק').

פתרון:

נסגור את המשטח ע"י $S_1=\left\{y=0,\ x^2+z^2=4\right\}$ וניעזר במשפט גאוס:

$$\iint_S A\bullet\hat{n}\,dS=\oiint_{S\cup S_1}A\bullet\hat{n}\,dS-\iint_{S_1}A\bullet\hat{n}\,dS=\iiint_V divA\,dV-\iint_{S_1}A\bullet\hat{n}\,dS$$

באשר V הוא הגוף הכלוא ע"י $S\cup S_1$. כיוון ש: $divA=0$ השטף המבוקש הוא:

$$-\iint_{S_1}A\bullet\hat{n}\,dS=-\iint_{S_1}\left(*,z^2-2xy\Big|_{y=0},*\right)\bullet(0,-1,0)\,dS=\iint_{S_1}z^2\,dS.$$

בקורדינטות קוטביות: $\left\{\begin{matrix}x=r\cos\theta\\ z=r\sin\theta\end{matrix}\right.$ נקבל: $\iint_{S_1}z^2\,dS=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^2 r\cdot r^2\,dr=\frac{16}{4}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta=4\pi$

ומכאן בסה"כ: $\iint_S A\bullet\hat{n}\,dS=4\pi$.