

השלמה לתרגול 9

20 בדצמבר 2015

תרגיל: תהי $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$ הוכיחו כי: $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, ואם f חח"ע מתקיים
 $A = f^{-1}(f(A))$
הוכחה: נוכיח כי $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
יהי $a \in A$ נרה כי $a \in f^{-1}(f(A))$

$$\begin{aligned} a &\in A \\ \Downarrow \\ f(a) &\in f(A) \end{aligned}$$

(נובע ישירות מההגדה $f(A) = \{y \in Y \mid \exists a \in A, f(a) = y\}$)

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ a &\in f^{-1}(f(A)) \end{aligned}$$

(ישירות מהגדרת תמונה חלקית הפכית עבור $f(A) \subseteq Y$ נקבל-
 $f^{-1}(f(A)) = \{a \in A \mid f(a) \in f(A)\}$
לכן $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
נוכיח כי אם f חח"ע אזי $A = f^{-1}(f(A))$.
נעשה הכלה בכיוון השני $A \supseteq f^{-1}(f(A))$, יהי $x \in f^{-1}(f(A))$ אזי $f(x) \in f(A)$
כי: $f^{-1}(f(A)) = \{a \in A \mid f(a) \in f(A)\}$.
לכן קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = f(x)$ אבל f חח"ע ולכן $a = x$. לכן $x \in A$.
לכן $A \supseteq f^{-1}(f(A))$.