

תרגיל 2

1.

חשבו את אורכה של כל אחת מהעקומות הבאות באמצעות הנוסחה $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

$$t \in [0, 2\pi] - \text{אשר } a > 0, \alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t) \quad (\text{א})$$

$$t \in [0, 2\pi] - \text{אשר } a > 0, \alpha(t) = (2a \cos t + a \cos 2t, 2a \sin t - a \sin 2t) \quad (\text{ב})$$

$$t \in [0, 2\pi] - \text{אשר } a > 0, \alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)) \quad (\text{ג})$$

$$t \in [0, 2\pi] - \text{אשר } a > 0, \alpha(t) = (2a \cos t - a \cos 2t, 2a \sin t - a \sin 2t) \quad (\text{ד})$$

2.

חשבו את העקמומיות הכוללת של העקומות הבאות:

$$\prod_{k=1}^n (kx^2 + ky^2 - 1) = 0 \quad (\text{א})$$

$$t \in [0, 2\pi] - \text{אשר } a > 0, \alpha(t) = (2a \cos t + a \cos 2t, 2a \sin t - a \sin 2t) \quad (\text{ב})$$

$$t \in [0, 6\pi] - \text{אשר } a > 0, \alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t) \quad (\text{ג})$$

3.

נתבונן בעקומה עם פרמטריזציה $\alpha(t) = (\cos t, \frac{1}{2} \sin 2t)$ כאשר $t \in [0, 2\pi]$

(א) האם זו פרמטריזציה במהירות יחידה?

(ב) חשבו את $\int_0^{2\pi} k(t) dt$ (כדאי באמצעות תוכנה כזו או אחרת). נסו להסביר זאת גיאומטרית (ראשית ציירו את העקומה).

4.

תהי $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ עקומה רגולרית סגורה הנתונה בפרמטריזציה טבעית. הוכיחו שאם העקמומיות $k(s)$ מונוטונית, היא קבועה.

5.

תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow S^2$ עקומה רגולרית, כאשר S^2 היא ספירת היחידה (זו עקומה מרחבית שתמונתה מוכלת בספירה). הוכיחו ש: $\gamma \perp \gamma'$.

6.

חשבו את העקמומיות של העקומות הבאות:

$$(\text{א}) \text{ אליפסה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(\text{ב}) \text{ פרבולה חצי-קובייתית: } x^3 - y^2 = 0$$

.7

חשבו את התבניות היסודיות של המשטחים הבאים:

(א) משטח הנתון בצורה הסתומה $z = f(x, y)$

(ב) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, ku)$

(ג) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, kv)$

(ד) $r(t, \theta) = (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, t)$

(ה) $r(t, \theta) = (2 \sin t \cos \theta, 2 \sin t \sin \theta, 2 \cos t)$

(ו) $r(\theta, v) = (\cosh v \cos \theta, \cosh v \sin \theta, \sinh v)$

.8

נתונה פרמטריזציה של משטח $r : U \rightarrow M$. תהי $f : A \rightarrow U$ פונקציה, $f(x, y) = (u, v)$ כאשר $A, U \subseteq \mathbb{R}^2$. נגדיר פרמטריזציה חדשה: $\tilde{r} = r \circ f$. הביעו את \tilde{G} , המטריקה של \tilde{r} , באמצעות G , המטריקה של r .

.9

מצאו נוסחה מפורשת להטלה הסטריאוגרפית.

.10

תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ עקומה פשוטה ורגולרית. נגדיר את הגליל מעל γ באופן הבא:

$$\Phi(a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(s, u) = (\gamma^1(s), \gamma^2(s), u)$$

כאשר $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$. הראו כי קיימות קואורדינטות על הגליל (פרמטריזציה של γ), עבורן $G = I$.

.11

תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ עקומה פשוטה ורגולרית. נגדיר את הגליל מעל γ באופן הבא:

$$\Phi(a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(s, u) = (\gamma^1(s), \gamma^2(s), u)$$

כאשר $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$. הראו כי קיימות קואורדינטות על הגליל (פרמטריזציה של γ), עבורן $G = I$.

12.

ספירת היחידה מוגדרת על ידי הפרמטריזציה הבאה:

$$f(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

כאשר $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] = U$. נתבונן בעקומה $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow U$ המוגדרת על ידי: $\gamma(t) = (\pi, 2t)$.

(א) מצאו את אורך העקומה γ .

(ב) מצאו את אורך העקומה $f \circ \gamma$.

(ג) הספירה לסמי התחצפה, ולא התחפפה, וסומו ישב עליה עד שיצאה טורוס, המוגדר על ידי הפרמטריזציה:

$$r(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$$

חשבו את השטחים $r(D)$, $r(E)$ כאשר $D = [0, \frac{\pi}{2}]^2$, $E = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$.