פתרון כמעט מלא של שאלה 5 בתרגיל 2

צריך לחשב את $e^{\frac{1}{2}}$ על ידי הצבה של $x = \frac{1}{2}$ בטור מקלורן (כלומר טור טיילור סביב 0) של e^x.

אנחנו יודעים שעבור פונקציה $f(x)$ טור טיילור שלה סביב $x = 0$ עד סדר n הוא

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

יותר מזה, אנחנו יודעים שעבור כל x מתקיים ש

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{Taylor} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{Remainder}$$

כאשר c נמצא בין 0 ל x.

החלק הראשון הוא בדיוק טור טיילור. החלק השני הוא השארית - כלומר זה ההפרש בין הערך האמיתי של הפונקציה לערך שמתקבל מטור טיילור - זאת הטעות של החישוב.

כמה שמפתחים יותר את טור טיילור (מוצאים אותו עבור n יותר ויותר גדול) הטעות תלך ותקטן.

אנחנו רוצים לחשב את e^x בנקודה $x = \frac{1}{2}$ עם טעות שלא תעלה על $\frac{10^{-4}}{2}$(כדי לקבל דיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה)

אז אנחנו יודעים ש (לפי הנוסחא ממקודם עבור e^x ו $x = \frac{1}{2}$) מתקיים ש

$$e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3 + \ldots + \frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^n + \frac{e^c}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}$$

כאשר $0 < c < \frac{1}{2}$

עכשו כל מה שנשאר לנו, זה למצוא n שעבורו השארית קטנה מ $\frac{10^{-4}}{2}$, כלומר למצוא n עבורו

$$\frac{e^c}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1} < \frac{10^{-4}}{2}$$

(אפשר להשתמש בניחושים ובמחשבון, לא צריך לפתור את האי שוויון - כמו כן אפשר לראות בקלות ש

$$e^c < 2$$

כי

$$(e^c)^2 = e^{2c} < e^{2\frac{1}{2}} = e < 4$$

וזה גם עוזר לחישוב)

אחרי שמצאנו את ה n הזה צריך לחשב את

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3+\ldots+\frac{1}{n!}(\frac{1}{2})^n$$

(כמובן שמספיק לקחת רק ארבע ספרות אחרי הנקודה)
ומובטח לנו שזה מספר שהמרחק שלו מ $e^{\frac{1}{2}}$ הוא לכל היותר $\frac{10^{-4}}{2}$.