גאומטריה אקסיומטית- פתרון תרגיל 5

הוכיחו את משפט $H.4$:

נניח ש-T ו-U נקודות על γ שלא עומדות זו מול זו על קוטר (כלומר TU מיתר שאינו קוטר, אינו עובר דרך O מרכז המעגל γ), ונניח P הקוטב של TU, אז $PT \cong PU$, $\sphericalangle PTU \cong \sphericalangle PUT$, $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{TU}$

והמעגל δ עם מרכז P ורדיוס $PT \cong PU$ חותך את γ ומאונך לו בנקודות T ו-U.

הוכחה

נתבונן במשולשים ישרי-זווית ΔOTP ו- ΔOUP:

$\sphericalangle OTP = \sphericalangle OUP = 90^\circ$ - זווית בין משיק לרדיוס בנקודת ההשקה היא ישרה.

$OT \cong OU$ רדיוסים ב-γ (ניצב)

$OP \cong OP$ צלע משותפת (יתר במשולשים ישרי-זווית).

לפי קריטריון יתר-ניצב לחפיפת משולשים ישרי-זווית נקבל $\Delta OTP \cong \Delta OUP$.

מכאן לפי הגדרת משולשים חופפים נקבל בפרט: $PT \cong PU$, $\sphericalangle OPT \cong \sphericalangle OPU$.

כעת נתבונן ב-ΔTPU:

$PT \cong PU$ קיבלנו קודם לפי חפיפה, לכן המשולש שווה-שוקים.

זוויות הבסיס $\sphericalangle PTU \cong \sphericalangle PUT$ במשולש שווה שוקים הן חופפות.

מכיוון ש-$\sphericalangle OPT \cong \sphericalangle OPU$ (קיבלנו בחפיפה הקודמת), $\overleftrightarrow{PO}$ חוצה זווית $\sphericalangle TPU$.

במשולש שווה שוקים חוצה הזוית הראש, $\overleftrightarrow{PO}$, מאונך לבסיס TU, לכן $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{TU}$.

נשים לב כיוון שהמשיק למעגל γ מאונך לרדיוס המעגל. משיק זה הינו רדיוס של המעגל δ, אנו מקבלים כי הרדיוסים של שני המעגלים מאונכים זה לזה ולכן לפי הגדרה **המעגלים מאונכים.**