# בוחן מבוא לחוגים ומודולים תשפב

15.5.2022

מרצה: פרופסור מיכאל שיין. מתרגלת: תמר בר-און.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות. זמן מוקצב: שעה וחצי.
- ניקוד שווה לכל אחד מהסעיפים של שאלה 1, הסעיפים של שאלה 3 ושאלה 2. ניקוד מקסימאלי: 110.
- כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

.

## בהצלחה!

1. יהא $R$ חוג, ו $I$ אידיאל של $R$. נגדיר את המאפס של $I$ להיות

$$\mathrm{Ann}(I) = \{r \in R \,|\, \forall x \in I :\ rx = 0\}$$

ענו על הבאים:

(א) הוכיחו: $\mathrm{Ann}(I)$ הוא אידיאל של $R$ (שימו לב ש $R$ לא בהכרח קומטטיבי).
פתרון:

- $0 \in \mathrm{Ann}(I)$ כי $0x = 0$ לכל $x$. בנוסף, לכל $r_1, r_2 \in \mathrm{Ann}(I)$ מתקיים כי $r_1x = 0, r_2x = 0$ לכל $x \in I$ ולכן לכל $x \in I$ מתקיים גם

$$(r_1 - r_2)\, x = r_1x - r_2x = 0 - 0 = 0$$

ולכן $r_1 - r_2 \in \mathrm{Ann}(I)$ והוכחנו ש $\mathrm{Ann}(I)$ תת חבורה.

- בליעה: יהא $r \in R$ ו $\hat{r} \in I$. אזי לכל $x \in I$ מתקיים כי

$$r\hat{r}x = r0 = 0$$

ולכן $r\hat{r} \in \mathrm{Ann}(I)$ ויש בליעה מצד אחד. מהצד השני, לכל $x \in I$ מתקיים $rx \in I$ ולכן $\hat{r}rx = 0$ וגם $\hat{r}r \in \mathrm{Ann}(I)$.

(ב) נניח כי $R$ קומטטיבי.
הוכיחו: $R$ הוא תחום שלמות אם ורק אם לכל אידיאל $I$ שונה מ $\{0\}$ מתקיים $\mathrm{Ann}(I) = \{0\}$.
פתרון: מצד $(\Rightarrow)$ נניח כי כל אידיאל $I$ שונה מ $\{0\}$ מתקיים $\mathrm{Ann}(I) = \{0\}$ ונוכיח כי $R$ תחום שלימות. נניח בשלילה כי $R$ אינו תחום שלמות אזי קיימים $a, b$ שונים מאפס כך ש $ab = 0$ לכן

$$abr = 0r = 0$$

לכל $r \in R$ ולכן $a$ שייך למאפס של $\langle b\rangle \neq \{0\}$ בסתירה להנחה.

מצד $(\Leftarrow)$ נניח כי $R$ תחום שלימות ויהא $I \neq \{0\}$ אידיאל. נוכיח כי $\mathrm{Ann}(I) = \{0\}$ ברור כי $0 \in \mathrm{Ann}(I)$ ונראה כי הוא היחידי. יהא $r \in \mathrm{Ann}(I)$. כיוון ש $I \neq \{0\}$ קיים $x \in I$ ששונה מאפס. לפי הגדרה $rx = 0$ אבל כיוון ש $R$ תחום שלימות ו $x \neq 0$ נקבל ש $r = 0$ כפי שרצינו.

2. יהא $R$ חוג קומטטיבי ו $I, J$ אידיאלים של $R$. נסמן ב

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ r^n \in I\}$$

את הרדיקל של $I$. הוכיחו: $\sqrt{I}, \sqrt{J}$ קו-מקסימאלים אם ורק אם $I, J$ קו-מקסימאלים.
תזכורת: אידיאלים $I_1, I_2$ נקראים קו-מקסימאלים אם $I_1 + I_2 = R$.
פתרון: כיוון ש $I \subseteq \sqrt{I}$ (כי לכל $i \in I$ מתקיים $i^1 \in I$) וגם $J \subseteq \sqrt{J}$ נקבל שאם $R = I + J$ אז

$$R = I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq R$$

ולכן גם $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$. נוכיח את הכיוון השני: נניח כי $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$ ונראה כי $I + J = R$. מספיק להראות כי $1 \in I + J$. מההנחה, קיימים $x \in \sqrt{I}, y \in \sqrt{J}$ כך ש $x + y = 1$. לפי הגדרת רדיקל, קיימים $n, m$ טבעיים כך ש $x^n \in I, y^m \in J$ . נעלה את השיוון $x + y = 1$ בחזקת $m + n$ לקבל

$$1 = 1^{m+n} = (x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}$$

ואז: במחובר $\sum_{k=0}^{n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}$ החזקה של $y$ גדולה שווה ל $m$ ולכן

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} = \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n}{k} x^k y^{n-k} \right) \cdot y^n \in J$$

ובאופן דומה, במחובר $\sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}$ כל חזקה של $x$ גדולה מ $n$ ולכן מחובר זה שייך ל $I$. קיבלנו ש 1 אכן סכום של איבר מ $J$ ועוד איבר מ $I$.

3. יהא $R$ תחום שלמות ותחום פריקות (תחום פריקות הוא חוג בו כל איבר ניתן להצגה [לא בהכרח יחידה] כמכפלה של גורמים אי-פריקים).

(א) יהא $P$ אידיאל ראשוני של $R$ ששונה מ $R$ ושונה מ $\{0\}$. הוכיחו: קיים איבר אי-פריק ב $P$.
פתרון: כיוון ש $P \neq R, \{0\}$ קיים בו איבר $p \in P$ ששונה מאפס ולא הפיך. כיוון ש $R$ תחום פריקות אזי $p$ ניתן להצגה כמפלה של גורמים אי-פריקים. נסמן אחד מהם ב $x$ ונקבל ש $x|p$ ולכן $x \in \langle p\rangle \subseteq P$ כפי שרצינו.

(ב) יהא $a$ איבר לא הפיך ב $R$ המקיים כי האידיאל שנוצר על ידו, $\langle a\rangle$, מכיל אידיאל ראשוני $P$ שונה $\{0\}$.
הוכיחו: $a$ איבר ראשוני.
פתרון: כיוון ש $a$ אינו הפיך $\langle a\rangle \neq R$ ולכן $P$ שמוכל בו גם שונה מ $R$ ולפי הנתון שונה גם מ $\{0\}$ ולכן לפי סעיף קודם קיים $x \in P$ אי-פריק. מכאן ש $x \in \langle a\rangle$ ולכן קיים $r \in R$ המקיים $x = ar$ ומכיוון ש $x$ אי-פריק $r$ הפיך (שהרי $a$ אינו הפיך לפי הנתון) מכאן ש $a = xr^{-1}$ ו $x|a$. כעת נוכיח ש $a$ ראשוני. נניח $a|bc$ ונראה ש $a|b$ או $a|c$. כיוון ש $x|a$ נקבל ש $x|bc$ ולכן $bc \in \langle x\rangle \subseteq P$ ומכיוון ש $P$ ראשוני נקבל ש $b \in P$ או $c \in P$. כיוון ש $P \subseteq \langle a\rangle$ נקבל ש $b$ או $c$ שייכים ל $\langle a\rangle$, כלומר אחד מהם מתחלק על ידי $a$ כפי שרצינו.