פתרון תרגיל בית 5

<u>שאלה 1</u>

א. נתבונן ב- $\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. נאמר ש- $C\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C=A\bigcup T$ כאשר: A היא תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ <u>בטופולוגיה האוקלידית</u>, ו- T היא תת קבוצה כלשהי של S. הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$.

<u>הדרכה</u>: קודם כל, תוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י כך שתראו את שלוש התכונות על קבוצות סגורות (ולא הפתוחות). שנית, כאשר תבדקו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור, היעזרו בכך שמתקיים:
$$C=\bigcap_{i\in I}\left(A_i\bigcup T_i\right)=\bigcap_{i\in I}A_i\bigcup\left(C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i\right).$$

ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ ולכל $n\in\mathbb{Z}$ נגדיר $O_n=\{n,n+1,n+2,...\}$. נסמן $\tau=\{\varnothing,\mathbb{Z}\}\bigcup\{O_n:n\in\mathbb{Z}\}$. הוכיחו:

1. $(\mathbb{Z},\tau)$ מרחב טופולוגי.

2. $(\mathbb{Z},\tau)$ אינו מטריזבילי.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א'</u>

נוכיח שזו טופולוגיה על ידי שנראה שמתקיימות 3 התכונות החלות על קבוצות סגורות.

1. $\varnothing$ סגורה, שכן $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing$ (הקבוצה הריקה סגורה בטופולוגיה האוקלידית וכמובן $\varnothing\in P(S)$).

   $\mathbb{R}$ סגורה, שכן $\mathbb{R}=\mathbb{R}\cup\varnothing$ ($\mathbb{R}$ סגור בטופולוגיה האוקלידית וכמובן $\varnothing\in P(S)$).

2. איחוד סופי: יהיו C_1,C_2 קבוצות סגורות, כלומר הן מהצורה $C_i=A_i\cup T_i$ כאשר A_i סגורה ב-$\mathbb{R}$ ו-$T_i\subseteq S$ (עבור $i\in\{1,2\}$). נתבונן באיחוד: $C_1\cup C_2=(A_1\cup A_2)\cup(T_1\cup T_2)$. מתקיים $T_1\cup T_2\in P(S)$ וכן $A_1\cup A_2$ סגורה ב-$\mathbb{R}$ כאיחוד סופי של סגורות.

3. חיתוך כלשהו: יהי $\{C_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות סגורות, כלומר $C_i=A_i\cup T_i$ (כמקודם), ונראה שחיתוכן הוא קבוצה סגורה. נסמן $C=\bigcap_{i\in I}C_i$.

קל לבדוק שמתקיים $C=\bigcap_{i\in I}(A_i\bigcup T_i)=\bigcap_{i\in I}A_i\bigcup\left(C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i\right)$ (שימו לב ש- $\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq C$). קודם כל, $\bigcap_{i\in I}A_i$ סגורה ב-$\mathbb{R}$ (כחיתוך של סגורות), שנית $C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq S$. הסבר להכלה: יהי $x\in C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i$ ולכן $x\in\bigcap_{i\in I}(A_i\cup T_i)$. אם $x\in A_i$ לכל $i\in I$ נקבל סתירה שכן $x\notin\bigcap_{i\in I}A_i$ ולכן קיים i_0 כך ש- $x\in T_{i_0}$ ומכיוון ש- $T_{i_0}\subseteq S$ נקבל הדרוש.

<u>סעיף ב'</u>

<u>תת סעיף 1</u>

נוכיח שזו טופולוגיה:

א. $\varnothing,\mathbb{Z}\in\tau$ מההגדרה;

ב. חיתוך: יהיו $U_1,U_2\in\tau$. אם אחת מהקבוצות היא ריקה אזי החיתוך ריק והטענה ברורה. אם אחת מהקבוצות היא המרחב כולו הטענה גם כן ברורה. אם כן, נניח ששתי הקבוצות שונות מהקבוצה הריקה ומהמרחב כולו. לכן קיימים $n,m\in\mathbb{Z}$ כך ש- $U_1=O_n,U_2=O_m$. נניח בה"כ $m\geq n$. מתקיים $O_n\cap O_m=O_m\in\tau$.

ג. איחוד: יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות. נניח שהן כולן שונות מהמרחב כולו (אחרת הטענה ברורה). אם כולן ריקות גם כן הטענה ברורה. ניתן להניח בה"כ ש לכל $i\in I$ $U_i=O_{n_i}$ עבור איזשהו $n_i\in\mathbb{Z}$.

נתבונן באיחוד $\bigcup_{i\in I} U_i$. אם קבוצת האינדקסים $\{n_i : i\in\mathbb{Z}\}$ אינה חסומה מלרע, אזי $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{Z}$ (למה?) וזו קבוצה פתוחה. אחרת, $\{n_i : i\in\mathbb{Z}\}$ חסומה מלרע וכתת קבוצה של המספרים השלמים יש לה מינימום n_{i_0}. אזי $\bigcup_{i\in I} U_i = U_{i_0}$ ולכן $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

<u>תת סעיף 2</u>

המרחב אינו מטריזבילי, שכן הנקודון $\{1\}$ (למשל) אינו סגור, שכן הקבוצה $\{1\}^C = \{\dots,-2,-1,0\}\cup\{2,3,4,\dots.\}$ אינה פתוחה.

מש"ל

<u>**שאלה 2**</u>

שאלה זו מציגה את הוכחתו הטופולוגית של פרופ' פורסטנברג לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים. **מותר ורצוי להשתמש במה שהוכחנו בתרגול לגבי טופולוגיה זו.**

כזכור, סדרה חשבונית דו צדדית היא קבוצה $S = a + d\mathbb{Z} = \{a + dk \mid k\in\mathbb{Z}\}$ $(a\in\mathbb{Z},\quad d\in\mathbb{N})$. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הפרו סופית בדרך הבאה:

$O\in\tau_{pro}$ אם"ם לכל $x\in O$ יש סדרה חשבונית דו צדדית $S = x + d\mathbb{Z}$ כך ש-

$x\in S\subseteq O$.

1. הוכיחו כי $\cup p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} - \{1,-1\}$ (האיחוד הוא על כל המספרים הראשוניים).
2. הוכיחו כי $\mathbb{Z} - \{1,-1\}$ אינה סגורה.
3. הסיקו כי ישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

<u>**פתרון**</u>

1. נראה הכלה דו כיוונית. יהי $y \in \bigcup p\mathbb{Z}$, אזי y הוא כפולה שלמה של ראשוני ובפרט $y \notin \{1,-1\}$. בכיוון ההפוך: יהי $m \in \mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אם m ראשוני אזי $m = m \cdot 1 \in m\mathbb{Z} \subseteq \bigcup p\mathbb{Z}$. אם m פריק אזי קיים ראשוני q המחלק את m ולכן $m \in q\mathbb{Z} \subseteq \bigcup p\mathbb{Z}$.

2. נראה ש $\{1,-1\}$ אינה פתוחה ולכן $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אינה סגורה. אמנם, $\{1,-1\}$ סופית ולכן לא יכולה להכיל סדרה חשבונית דו צדדית שהיא אינסופית.

3. נניח בשלילה כי מס' הראשוניים הוא סופי. הראינו שכל סדרה חשבונית דו צדדית היא סגורה וכמו כן איחוד סופי של קב' סגורות היא סגורה ומכאן $\bigcup p\mathbb{Z}$ סגורה. עפ"י סעיף (1) נקבל ש- $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ סגורה בסתירה לסעיף (2).

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

תזכורת:

תהי Y קבוצה כלשהי, ותהי $p \notin Y$ ויהי $X = \{p\} \cup Y$. נגדיר

$\tau = \left\{ O \subseteq X : p \notin O \ \vee \ \left|O^c\right| \le \aleph_0 \right\}$.

א. הוכיחו ש-(X,τ) הוא מרחב טופולוגי.

ב. נניח ש- $|X| \le \aleph_0$. הוכיחו כי $\tau = \tau_{disc}$.

ג. בתנאי סעיף ב', האם (X,τ) מטריזבילי?

<u>פתרון</u>

א. נבדוק את התכונות. $\varnothing \in \tau$ שכן $p \notin \varnothing$. $X \in \tau$ שכן $\left|X^c\right| = 0 \le \aleph_0$.

החיתוך: יהיו $U,V \in \tau$. אם p לא שייכת לאחת מהן, אזי לא שייכת לחיתוך וסיימנו. אחרת p שייכת לשתיהן ולכן $|U^C| \le \aleph_0, |V^C| \le \aleph_0$.

מתקיים $\left|(U \cap V)^C\right| = \left|U^C \cup V^C\right| \le |U^C| + |V^C| \le \aleph_0$ ולכן $U \cap V \in \tau$.

האיחוד: יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות. אם p לא נמצאת באף אחת מהקבוצות, אזי היא לא נמצאת באיחוד וסיימנו. אחרת, קיים k כך ש- $p\in U_k$ ולכן $|U_k{}^C|\le\aleph_0$. מתקיים $\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)^C=\bigcap_{i\in I}U_i{}^C\subseteq U_k{}^C$ ולכן $\left|\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)^C\right|\le\left|U_k{}^C\right|\le\aleph_0$.

ב. ברור שמתקיים $\tau\subseteq\tau_{disc}$. נוכיח את ההכלה ההפוכה. נוכיח שכל נקודון הוא פתוח. עבור $x\in X$, אם $x\ne p$ אזי $p\notin\{x\}$ ולכן $\{x\}$ פתוח. גם הנקודון $\{p\}$ פתוח שכן $|\{p\}^C|\le\aleph_0$.

ג. כן, על ידי מטריקת $0-1$.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

<u>תזכורת</u>

נתבונן ב-$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה T הבאה:

קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד של קבוצות מהצורה $[a,b)$ (זהו הישר של סורגנפריי).

א. הוכיחו כי T אכן טופולוגיה.

ב. הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$, שנסמנה להלן ב τ (המתקבלת ע"י המטריקה הרגילה), מקיימת $\tau\subset T$ (הכלה <u>אמיתית</u>!).

ג. הוכיחו שהסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ מתכנסת בטופולוגיה של סורגנפריי.

<u>פתרון</u>

א. קבוצה ריקה: מתקבלת כאיחוד ריק.

המרחב כולו: מתקבל כאיחוד של $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n)$.

סגירות ביחס לחיתוך סופי: מספיק להתבונן בשתי קבוצות מהצורה $[a,b),[c,d)$ (מדוע?). יתכנו שתי אפשרויות: אם החיתוך ריק, הטענה

מתקיימת. אחרת, $[a,b)\cap[c,d)=[e,f)$ כאשר

$e=\max\{a,c\},\ f=\min\{b,d\}$.

סגירות ביחס לאיחוד: טריוויאלי.

ב. ברור ש $\tau\not\subset T$ כי למשל $[2,3)\in T\setminus\tau$. נראה ש $\tau\subseteq T$ וזה יוכיח בסה"כ ש- $\tau\subset T$. תהי $O\in\tau$ אזי לכל $x\in O$ קיים $\varepsilon_x>0$ (יש תלות ב x) כך ש $B(x,\varepsilon_x)\subseteq O$. מתקיים $O\subseteq\bigcup_{x\in O}\left[x,x+\varepsilon_x\right)\subseteq\bigcup_{x\in O}B(x,\varepsilon_x)\subseteq O$, לכן $O=\bigcup_{x\in O}\left[x,x+\varepsilon_x\right)$ ומכאן $O\in T$.

ג. נוכיח שהסדרה $\frac{1}{n}$ מתכנסת ל 0 במ"ט זה. תהי U סביבה של 0 אזי U היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ לכן קיים קטע $[a,b)$ כך ש $0\in[a,b)\subseteq U$. $a\le 0<b$ ולכן גם מתקיים $0\in[0,b)\subseteq[a,b)\subseteq U$. $0<b$

ולכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $b>\frac{1}{n_0}$. מתקיים לכל $n\ge n_0$ $b>\frac{1}{n_0}\ge\frac{1}{n}>0$.

מכאן לכל $n\ge n_0$ $\frac{1}{n}\in(0,b)\subseteq[0,b)\subseteq[a,b)\subseteq U$.

הערה: מכלתחילה היה ברור שאם $\frac{1}{n}\xrightarrow{T}x$ אז $x=0$ שכן $\tau\subset T$ ועפ"י טענה שהוכחנו בכיתה במצב זה אם $\frac{1}{n}\xrightarrow{T}x$ אז גם $\frac{1}{n}\xrightarrow{\tau}x$ אבל אנו יודעים ש $\frac{1}{n}\xrightarrow{\tau}x$ אם ורק אם $x=0$ (מדוע?).

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הראו שהתנאים הבאים שקולים:

1. (X,τ) מ"ט טריוויאלי.
2. לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ ולכל $x\in X$ מתקיים $x_n\xrightarrow{\tau}x$.

ב. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי עם הטופולוגיה הקו-סופית. תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים. הוכיחו כי לכל $x\in X$ מתקיים $x_n\xrightarrow{\tau}x$.

ג. תהי $X=\{a,b\}$, $\tau=\{\varnothing,\{a\},X\}$ (זהו מרחב Sierpinski) . מצאו את **כל** הסדרות המתכנסות לגבול יחיד ואת **כל** הסדרות המתכנסות לשני גבולות במרחב (X,τ). הוכיחו את תשובתכם.

__פתרון__

א. $1\Leftarrow 2$ תהי $\{x_n\}\subseteq X$ ו- $x\in X$. במ"ט טריוויאלי הסביבה היחידה U של x היא X. נקבל שלכל U סביבה של x מתקיים $x_n\in U$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ומכאן $x_n\xrightarrow{\tau}x$.

$2\Leftarrow 1$ נניח בשלילה ש(X,τ) אינו טריוויאלי. מכאן קיימת $\varnothing\subset A\subset X$ (הכלה ממש) כך ש $A\in\tau$. אזי קיימות $x\neq y$ כך ש $x\in A$ ו- $y\in X\setminus A$.
הסדרה הקבועה $x_n=y$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אינה מתכנסת ל x בסתירה להנחה. אכן, A סביבה של x ו $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cap A=\varnothing$.

ב. מ"ל שאם U סביבה פתוחה של x אזי קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $x_n\in U$.
תהי U סביבה פתוחה של x אזי U פתוחה ולא ריקה ומכאן U^C סופית.
מכיון שכל איברי הסדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ שונים ו U^C סופית הקבוצה $\{n\in\mathbb{N}:x_n\in U^C\}$ בהכרח סופית. אם $\{n\in\mathbb{N}:x_n\in U^C\}=\varnothing$ יהי $n_0=1$ אם $\{n\in\mathbb{N}:x_n\in U^C\}\neq\varnothing$ יהי $n_0=\max\{n\in\mathbb{N}:x_n\in U^C\}+1$. נקבל שלכל $n_0\leq n$ $x_n\notin U^C$. כלומר, לכל $n_0\leq n$ $x_n\in U$ והוכחנו את ההתכנסות.

ג. כל סדרה מתכנסת ל b שכן הסביבה היחידה של b היא X.(וניתן לחקות את ההוכחה בסעיף א') . נראה שהסדרות היחידות המתכנסות לגבול a הן הקבועות לבסוף ששוות לבסוף a כלומר הסדרות $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ שמקיימות : קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n=a$. ברור שסדרות אלו מתכנסות ל a. נוכיח שזהו תנאי הכרחי. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל a. $\{a\}$ סביבה של a ולכן מההתכנסות נובע שקיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n\in\{a\}$. כלומר, לכל $n\geq n_0$ $x_n=a$ כדרוש.

לסיכום, כל סדרה $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את התנאי : קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n=a$ תתכנס לשני גבולות a ו- b. כל סדרה אחרת <u>שאינה</u> מקיימת את התנאי תתכנס לגבול יחיד שהוא b.

<u>שאלה 6</u>

א. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את כל תתי הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה).
הראו ש (X,τ) היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

ב. יהי X מצוייד בטופולוגיה הקו-סופית. נניח שקיימות במרחב לפחות 3 קבוצות סגוחות. הראו ש X סופית.

ג. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X עם התכונה הבאה:
הקבוצה האינסופית היחידה שהיא פתוחה היא X עצמה. האם τ היא בהכרח הטופולוגיה הטריוויאלית? נמקו את תשובתכם.

<u>פתרון</u>

א. כדי להוכיח ש τ הטופולוגיה הדיסקרטית, מ"ל שלכל $x\in X$ הנקודון $\{x\}$ פתוח. X אינסופית- ידוע מבדידה שקיימות A,B זרות כך ש $A\cup B=X$ וגם A,B אינסופיות. בה"כ $x\in A$. מתקיים $A,B\cup\{x\}$ אינסופיות ולכן $A,B\cup\{x\}\in\tau$. τ טופולוגיה ולכן סגורה לחיתוך סופי ומכאן $\{x\}=A\cap\left(B\cup\{x\}\right)\in\tau$.

ב. בכל מ"ט $X,\varnothing$ סגוחות טריויאליות. לכן מהנתון קיימת במרחב סגוחה לא טריויאלית A. בפרט A,A^C סגורות השונות מ X. מהגדרת הטופולוגיה הקו-סופית נקבל ש A,A^C סופיות ומכאן $X=A\cup A^C$ סופית.

ג. לא. נראה דוגמא נגדית. נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$ באופן הבא:
$\tau=\left\{\mathbb{R},\varnothing,\{19\}\right\}$.