מבחן סיום בקורס מבוא לאלגברה לינארית 89-119 מועד ב'

סמסטר א' תשע"ח

מרצה: איתמר שטיין

מתרגל: אחמד סלימאן.

תאריך: כ"א אדר תשע"ח 8.3.18

משך המבחן: שלוש שעות.

הוראות: יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. אם עניתם על 5 שאלות, יש לסמן באופן ברור 4 שאלות שאתם רוצים שתבדקנה. אחרת 4 השאלות הראשונות תבדקנה.

כל שאלה שווה 25 נקודות.

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי פשוט בלבד.

יש לנמק היטב את תשובותיכם!

1. נתונה מערכת משוואות התלויה בפרמטרים a, b.

$$x + 2y - z = 1$$
$$-x - y + 3 = 1$$
$$x + (a+1)y + az = b$$

עבור אילו ערכים של a, b למערכת יש פתרון יחיד? אין פתרון? או אינסוף פתרונות? עבור מצבים של אינסוף פתרונות מצאו גם פתרון כללי.

פתרון. נייצג את המערכת במטריצה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & a+1 & a & b \end{array}\right) \overset{R_2=R_2+R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a+1 & a & b \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3=R_3-R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-1 & a+1 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3=R_3-(a-1)R_2}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a+1-2(a-1) & b-1-2(a-1) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -a+3 & -2a+b+1 \end{array}\right)$$

אם $a \neq 3$ אז אין איבר חופשי כי יש שלושה איברים מובילים (ואין שורת סתירה) ולכן יש פתרון יחיד. אם $a = 3$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{array}\right)$$

ואז אם $b \neq 5$ אז יש שורת סתירה ואין פתרון. לעומת זאת אם $b = 5$ אז נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כאן אין שורת סתירה אבל יש איבר חופשי (z) ולכן יש אינסוף פתרונות. נמצא פתרון כללי

$$z = t$$

$$y = 2 - 2t$$

$$x = -2y + z + 1 = 5t - 3$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} 5t-3 \\ -2t+2 \\ t \end{pmatrix}$$

וזהו.

2. (א) תהיינה 3 מטריצות הפיכות $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. נתון כי $|B| = -3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

וכן נתון כי

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} B^{-1} C = A$$

i. (9 נק') מצאו את a.

פתרון. מהשוויון המסובך שנתון כאן ניתן להסיק ש

$$\left|C^{-1}\begin{pmatrix}1&4&a\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}B^{-1}C\right|=|A|$$

$$|C^{-1}|\left|\begin{pmatrix}1&4&a\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right||B^{-1}||C|=|A|$$

עכשיו, לפי הנתון

$$|B^{-1}|=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

וכמו כן,

$$|C^{-1}||C|=1$$

וגם

$$\left|\begin{pmatrix}1&4&a\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right|=6$$

(כי זו מטריצה משולשית עליונה ולכן הדטרמיננטה שלה היא פשוט מכפלת איברי האלכסון) ולכן נסיק כי

$$|A|=6\cdot(-\frac{1}{3})=-2$$

עכשיו נחשב את הדטרמיננטה של A לפי מה שנתון עליה. נחשב לפי שורה ראשונה למשל

$$|A|=\left|\begin{pmatrix}1&1&a\\2&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}\right|=1\left|\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\right|-1\left|\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix}\right|+a\left|\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\right|$$

$$=0-1(2)+a\cdot 1$$

קיבלנו בסך הכל

$$-2=-2+a$$

ולכן

$$a = 0$$

ii. (9 נק') חשבו את A^{-1}.

פתרון. לפי הסעיף הקודם גילינו ש

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

כדי לחשב את A^{-1} נשתמש באלגוריתם הרגיל. נשים את A ליד מטריצת

היחידה I ונדרג את A ל I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{R_2=R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_3=R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_2=R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_3=\frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_1=R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_2=-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

ולכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(ב) (7 נק') מצאו מטריצות אלמנטריות E_1, E_2 כך ש

$$E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. צריך להגיע מ I למטריצה הנתונה על ידי שתי פעולות שורה. זה לא כל כך קשה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{R_1=R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_2=2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וזה אומר בעצם ש

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן אפשר לקחת

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (א) נתונים ארבעה וקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ a-2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

התלויים בפרמטר a.

i. (10 נק') עבור אילו ערכי a הוקטורים פורשים את $\mathbb{R}^3$?

פתרון. כדי לבדוק אם וקטורים פורשים את $\mathbb{R}^3$, צריך לשים אותם בעמודות מטריצה, לדרג, ולבדוק אם יש שורת אפסים. אז אנחנו נעשה את זה ונבדוק עבור אילו ערכי a יש שורת אפסים.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & a-2 \\ 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \overset{R_2=R_2+R_1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & a+2 \\ 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_2=R_3-2R_1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & a+2 \\ 0 & 3 & a-4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_2=-\frac{1}{2}R_2}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}a-1 \\ 0 & 3 & a-4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3=R_3-3R_2}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}a-1 \\ 0 & 0 & a-4 & -6+\frac{3}{2}a \end{pmatrix}$$

תהיה שורת אפסים רק אם

$$a-4=0$$

וגם

$$-6+\frac{3}{2}a=0$$

הפתרון של שתי המשוואות הוא $a=4$ אז זה המצב היחיד שבו הוקטורים לא יפרשו את $\mathbb{R}^3$. אם $a\neq 4$ הוקטורים יפרשו את $\mathbb{R}^3$.

ii. (5 נק') מצאו את ההטלה של הוקטור v_1 על הוקטור v_2.

פתרון. לפי הנוסחא למציאת הטלה, ההטלה

$$\pi_{v_2}(v_1)=\frac{v_1\cdot v_2}{v_2\cdot v_2}v_2$$

במקרה שלנו

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 2 = 2$$

$$v_2 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$$

ולכן ההטלה היא

$$\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: לכל שלושה וקטורים $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$u_1 + u_2 + u_3 \in \operatorname{span}\{u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_2 + 2u_3\}$$

נמקו.

פתרון. השאלה היא בעצם האם יש מקדמים α, β, γ כך ש

$$u_1 + u_2 + u_3 = \alpha(u_1 - u_2) + \beta(u_2 - u_3) + 2\gamma u_3$$

אם נסדר נקבל

$$u_1 + u_2 + u_3 = \alpha u_1 + (-\alpha + \beta)u_2 + (-\beta + 2\gamma)u_3$$

כלומר השאלה היא האם למערכת המשוואות

$$\alpha = 1$$

$$-\alpha + \beta = 1$$

$$-\beta + 2\gamma = 1$$

יש פתרון? במקרה הזה ברור שיש. גם אם נרכיב מטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

אז קל לראות שעל ידי דירוג מגיעים למטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

שאין בה שורת סתירה.

4. (א) (15 נק') נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -11 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיסים עבור המרחבים $C(A)$ $R(A)$ $N(A)$ ומצאו את $\operatorname{rank} A$.

פתרון. צריך לדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -11 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xmapsto{R_2=R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -11 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_3=R_3+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -15 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_4=R_4-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_2=-\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_3=R_3-5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_4=R_4+3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

טוב. הגענו לצורה מדורגת. עכשיו אפשר למצוא מה שצריך. בשביל בסיס למרחב העמודות לוקחים מהמטריצה המקורית את העמודות שבמטריצה המדורגת יש להם

איבר מוביל. לכן בסיס עבור $C(A)$ יהיה

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

בשביל בסיס למרחב השורות $R(A)$ לוקחים את השורות שלא התאפסו במטריצה המדורגת

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$$

הדרגה $\operatorname{rank} A$ היא המימד של מרחב העמודות או השורות. כאן היא 2.

בשביל למצוא בסיס למרחב האפס. נמצא פתרון כללי. המשתנה z הוא חופשי

$$z = t$$

$$y = 3t$$

$$x = -2y + 2t = -4t$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix}-4t\\3t\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$$

ולכן בסיס למרחב האפס יהיה

$$\left\{\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(ב) (10 נק') תהי מטריצה $B \in \mathbb{R}^{5\times 8}$. הסבירו מדוע לא ייתכן כי $\dim N(B) = 2$.

פתרון. המימד של מרחב האפס הוא מספר האיברים החופשיים בדירוג של המטריצה. למטריצה בגודל 5×8 יש לכם היותר 5 איברים מובילים בדירוג (מספר השורות) ולכן לכל הפחות 3 איברים חופשיים. לא ייתכן שיהיו רק 2.

5. נתונה מטריצה 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(א) (9 נק') הוכיחו כי A לכסינה.

פתרון. נחשב ערכים עצמיים. נפתח דטרמיננטה לפי עמודה ראשונה

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \left| \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -5-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (-3-\lambda) \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -5-\lambda \end{pmatrix} \right| - 2 \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{pmatrix} \right| - 1 \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \right| \\
&= (-3-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 4) - 2(-8 - 2\lambda) - (4 + \lambda) \\
&= -3\lambda^2 - 15\lambda - 12 - \lambda^3 - 5\lambda^2 - 4\lambda + 12 + 3\lambda = -\lambda^3 - 8\lambda^2 - 16\lambda \\
&= -\lambda(\lambda^2 + 8\lambda + 16) = -\lambda(\lambda + 4)^2
\end{aligned}$$

ולכן יש לנו שני ערכים עצמיים. $\lambda = 0$ עם ריבוי אלגברי $a_0 = 1$. ו $\lambda = -4$ עם ריבוי אלגברי $a_{-4} = 2$.

לקראת הסעיף הבא, כבר נמצא בסיסים למרחבים העצמיים. עבור $\lambda = 0$ פשוט

צריך למצוא בסיס למרחב האפס של A. אז נדרג את A

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xmapsto{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_1 = -R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_2 = R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_3 = R_3 + 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{R_3 = R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $z = t$ ואז

$$y = -2t$$

$$x = -2y - 5z = -t$$

ולכן קיבלנו פתרון כללי

$$\begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן בסיס למרחב V_0 יהיה

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עכשיו נחפש בסיס למרחב העצמי V_{-4}. לצורך כך נמצא בסיס למרחב האפס של $A+4I$

$$\begin{pmatrix}-3&2&1\\2&0&2\\-1&-2&-5\end{pmatrix}+4I=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$$

נדרג

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\overset{R_2=R_2-2R_1}{\longmapsto}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3=R_3+R_1}{\longmapsto}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש כאן שני משתנים חופשיים. נסמן $z=t$ ו $y=s$ ואז

$$x=-2s-t$$

נקבל פתרון כללי

$$\begin{pmatrix}-2s-t\\s\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן בסיס עבור המרחב V_{-4} יהיה

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

על כל פנים גילינו שעבור הערך העצמי $\lambda = 0$ מתקיים $a_0 = g_0 = 1$ (יש איבר אחד בבסיס ולכן הריבוי הגיאומטרי הוא 1) ועבור הערך העצמי $\lambda = -4$ $a_{-4} = g_{-4} = 2$ (יש שני איברים בבסיס ולכן הריבוי הגיאומטרי הוא 2). אז יש לנו 3 ערכים עצמיים (כולל כפילויות) ולכל ערך עצמי הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי ולכן המטריצה לכסינה.

(ב) (8 נק') מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = D$. (אין צורך לחשב את P^{-1})

פתרון. למעשה לפי הסעיף הקודם

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ג) (8 נק') האם המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

דומה ל A? נמקו.

פתרון. ההסבר הקצר הוא כזה: הדרגה של A היא 2 (כי ראינו שלאחר דירוג יש שני איברים מובילים, מימד מרחב האפס הוא 1) ואילו הדרגה של B היא 1 (כל העמודות שלה הם כפולה של הראשונה ולכן מימד מרחב העמודות הוא 1) למטריצות דומות יש את אותה דרגה ולכן A לא דומה ל B. אם לא שמים לב להסבר הזה אפשר לחשב את הפולינום האופייני של B. נפתח את הדטרמיננטה

לפי עמודה ראשונה

$$
\begin{aligned}
|B-\lambda I| &= \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 1 & -1-\lambda & 4 \\ -1 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right| \\
&= (1-\lambda)\left|\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right| - 1\left|\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right| - 1\left|\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1-\lambda & 4 \end{pmatrix}\right| \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+4-4)-(\lambda)-(4\lambda) = \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2+5\lambda)-5\lambda \\
&= \lambda((1-\lambda)(\lambda+5)-5) = \lambda(-\lambda^2-4\lambda) = -\lambda^2(\lambda+4)
\end{aligned}
$$

יש אותם ערכים עצמיים כמו ל A $\lambda = 0$ ו $\lambda = -4$ אבל הריבויים האלגבריים שונים ולכן B לא דומה ל A.

נוסחאות:

- אורך: $||u|| = \sqrt{u \bullet u}$
- מרחק: $d(u,v) = ||u-v||$
- זוית: $\cos\alpha = \frac{u \bullet v}{||u||||v||}$
- הטלה: $\pi_v(u) = \frac{u \bullet v}{v \bullet v} v$