דף 1

משוואות דיפרנציאליות רגילות – תרגול 3

מד"ר מסדר שני: $F(x,y,y',y'')=0$

- ניתן לפתור $F(y,y',y'')=0$ ע"י הצבה $y'=p(y)$

ע"י גזירה לפי x נקבל:

$$y''(x)=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'(y)\cdot p$$

ונקבל $F(y,p,p')=0$ שזוהי מד"ר מסדר ראשון עבור $p(y)$

תרגיל: פתור $y''=y'(1+(y')^2)$

פתרון: נציב $y'=p \Leftarrow$ $y''=p\cdot p'$

$$p\cdot p'=p(1+p^2)$$

- אם $p=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow \boxed{y=c}$

נניח $p\neq 0$ ונחלק ב-p:

$$p'=1+p^2$$

$$\frac{dp}{dy}=1+p^2 \Rightarrow \frac{dp}{1+p^2}=dy$$

$$\Rightarrow \arctan(p)=y+c \Rightarrow p(y)=\tan(y+c)$$

$$\Rightarrow y'=\tan(y+c) \Rightarrow \frac{dy}{\tan(y+c)}=dx$$

$$\Rightarrow \cot(y+c)\,dy=dx \Rightarrow \ln|\sin(y+c)|=x+k$$

$$\sin(y+c)=Ae^x \quad ; \quad A=\pm e^k$$

$$\Rightarrow y+c=\arcsin(Ae^x)$$

נסמן $A=C_1$, $-c=C_2$

$$\Rightarrow \boxed{y=\arcsin(C_1e^x)+C_2}$$

* נשים לב כי אז $C_1=0$ מקבלים את הפתרון הקבוע.

<u>הערה:</u> בפתרון מד"ר מסדר ראשון היה בד"כ קבוע אחד, C או k.
כך בפתרון מד"ר מסדר שני אני מצפה לשני קבועים C_1 ו C_2.
ובאופן כללי, במד"ר מסדר n נצפה שיהיו עד n קבועים בפתרון $C_1, \dots, C_n$.

לא בכל מד"ר נקבל n קבועים, למשל אם $y^2+(y')^2+(y'')^2+(y''')^2=0$
זהו מד"ר מסדר 3 ובו סכום ריבועים, מס' אי שליליים, שיפרוש $y=y'=y''=y'''=0$ כלומר $y(x)=0$ ואין קבועים <u>בכלל</u>.

<u>תרגיל:</u> פתור $y \cdot y''=3-(y')^2$

<u>פתרון:</u> נג"ב $y'=p \Leftarrow y''=p \cdot p'$

ונקבל $y \cdot p \cdot p' = 3-p^2$

לפני שנחלק ב- $3-p^2$ נשים לב כי אם $3-p^2=0$
אזי $y'=\pm\sqrt{3}$ ומתקבל פתרון. (לעומת זאת $y=0$ אינו פתרון)

$$\frac{p\,dp}{3-p^2}=\frac{dy}{y} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|3-p^2|=\ln|y|+C$$

$$\ln|3-p^2|=\ln|y^{-2}|+A$$

$$3-p^2=k\,y^{-2} \quad ; \quad k=\pm e^A$$

$$\Rightarrow (y')^2=3-k\,y^{-2} \Rightarrow y'=\pm\sqrt{\frac{3y^2-k}{y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{3y^2-k}}{y} \Rightarrow \frac{y\,dy}{\sqrt{3y^2-k}}=\pm dx \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{3y^2-k}=\pm x+C$$

$$\Rightarrow \sqrt{3y^2-k}=\pm 3x+A \Rightarrow 3y^2-k=9x^2\pm 6Ax+A^2$$

$$\Rightarrow y^2=3x^2\pm 2Ax+\frac{A^2+k}{3} \Rightarrow \boxed{y=\pm\sqrt{3x^2+C_1x+C_2}}$$

<u>קבועים:</u>
$$\begin{cases} C_1=\pm 2A \\ C_2=\frac{A^2+k}{3} \end{cases}$$

מד"ר לינארית מסדר n

מד"ר לינארית מסדר n היא מד"ר מהצורה:

$$a_n(x)\,y^{(n)}+\dots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=b(x)$$

אם $b(x)=0$ המד"ר נקראת הומוגנית

אחרת, אי-הומוגנית.

פתרון מד"ר לינארית הומוגנית

כדי לפתור מד"ר לינארית הומוגנית $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,y^{(k)}=0$, עלינו למצוא n פתרונות בת"ל $y_1,\dots,y_n$ ואז הפתרון הכללי יהיה צירוף לינארי שלהם $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$

תזכורת מאלגברה לינארית:
פונקציות $y_1,\dots,y_n$ הן בת"ל אם ורק אם $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i=0$ גורר $\alpha_i=0$ לכל $1\leq i\leq n$

תזכורת נוספת מלוגיקה לגבי תנאי מספיק:

טענה: אם p ; q טענות אזי מתקיימת השקילות הבאה:

$$p\longrightarrow q \quad (i)$$
$$\neg q\longrightarrow \neg p \quad (ii)$$

דוגמא: (i) אם יורד גשם אז יש עננים

(ii) אם $\neg$(יש עננים) אז $\neg$(יורד גשם), דהיינו

אם אין עננים אז אין גשם

כעת, נוכל לשאול את השאלה הבאה:
בהנתן n פונק' $y_1,\dots,y_n$, כיצד נדע האם הן ת"ל או בת"ל ?

ולצורך כך הוגדרה פונקציה העוזרת לנו.

Józef Maria Hoene-Wroński

(פולני ← צרפתי)

הורונסקיאן

<u>הגדרה:</u> בהינתן n פונקציות, $y_1,\dots,y_n$, המוגדרות וגזירות n-1 פעמים בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$ כלשהו, הורונסקיאן שלהן מוגדר בתור הדטרמיננטה הבאה:

$$W(y_1,\dots,y_n):=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

<u>דוגמא:</u> אם $y_1=3x+1$; $y_2=2x^2-2$ אזי

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} 3x+1 & 2x^2-2 \\ 3 & 4x \end{vmatrix}=12x^2+4x-6x^2+6=$$

$$=6x^2+4x+6$$

כיצד עונה הורונסקיאן על השאלה ?

- אם הפונק' ת"ל אזי הורונסקיאן מתאפס, ז"א,

ת"ל $y_1,\dots,y_n \longrightarrow W(y_1,\dots,y_n)=0$

ואם כן לפי התכפורת

$W(y_1,\dots,y_n)\neq 0 \longrightarrow$ בת"ל $y_1,\dots,y_n$

<u>הערה:</u>

$W(y_1,\dots,y_n)=0 \not\longrightarrow$ ת"ל $y_1,\dots,y_n$

לדוגמא קחו $y_1=x$ $y_2=|x|$

3821

אולם, אם $y_1,\dots,y_n$ פתרונות עבור אותה מד"ר לינארית הומוגנית (נורמלית) אז ניתן לומר שאם הורונסקיאן מתאפס אז $y_1,\dots,y_n$ ת"ל.

<u>הערה:</u> בחילוף סדר הפונקציות בורונסקיאן מקבלים אותה תוצאה עד כדי סימן.

צ"א, לכל תמורה $\sigma\in S_n$

$$W\left(y_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)},\dots,y_{\sigma(n)}\right)=\operatorname{sign}(\sigma)\cdot W(y_1,\dots,y_n)$$

<u>תרגיל:</u> מצא פתרון כללי למשוואה $y''+y=0$

<u>פתרון לא נכון:</u> $y_1=\sin x$ פתרון וגם $y_2=3\sin x$ פתרון ולכן הפתרון הכללי הינו:

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1\sin x+3c_2\sin x=k\sin x$$

$\longrightarrow$ (חסר קבוע שני)

הטעות היא ש $\sin x$ ו- $3\sin x$ הן ת"ל.

<u>פתרון:</u> ניתן לראות ש $y_1=\cos x$ ו- $y_2=\sin x$ פתרונות של המד"ר ולכן הפתרון הכללי הוא $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ והפעם הפתרונות בת"ל, שכן:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2x+\sin^2x=1\neq 0$$

<u>תנאי התחלה</u>

למד"ר מסדר n עם פתרון שבו n קבועים יש צורך ב- n תנאי התחלה (משוואות)

<u>תרגיל:</u>

$$\begin{cases}y''=0\\ y(1)=2\\ y'(1)=4\end{cases}$$

פתרון:

$$y''=0 \Rightarrow y'=c_1 \Rightarrow y=c_1x+c_2$$

תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y(1)=c_1+c_2=2 \\ y'(1)=c_1=4 \end{cases} \Rightarrow c_2=-2$$

$$\Rightarrow \boxed{y=4x-2}$$ פתרון

דוגמא: הוכח שהפונקציות $y_1=x$ ו- $y_2=x^3$ מקיימות את המשוואה הבאה:

$$x^2y''-3xy'+3y=0$$

ושהן בת"ל. $(x>0)$

מצא פתרון y_3 המקיים את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y_3(\pi)=2\pi^3 \\ y_3'(\pi)=4\pi^2 \end{cases}$$

פתרון: נבדוק האם $y_1=x$ פתרון ע"י הצבה במד"ר:

$$x^2\cdot(x)''-3x\cdot(x)'+3x \overset{?}{=} 0$$

נבדוק כנ"ל לגבי $y_2=x^3$

$$x^2(x^3)''-3x(x^3)'+3x^3=6x^3-9x^3+3x^3=0$$

נתבונן בורונסקיאן

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}=3x^3-x^3=2x^3 \underset{x>0}{>} 0$$

לכן הפתרונות בת"ל.

הפתרון הכללי הוא

$$\boxed{y=c_1x+c_2x^3}$$

למציאת y_3 בשימוש בתנאי ההתחלה נקבל:

$$\begin{pmatrix} \pi & \pi^3 \\ 1 & 3\pi^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi^3 \\ 4\pi^2 \end{pmatrix}$$

והפתרון הינו:

$$c_1 = \pi^2$$
$$c_2 = 1$$

ז"א $y_3 \longleftarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y_3 = \pi^2 x + x^3}$$

הורדת סדר (מסדר n $\longleftarrow$ לסדר $n-1$)

אם נתון פתרון $y_0(x)$ למשוואה $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\cdot y^{(k)} = 0$

נחפש פתרון ל $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)} = b(x)$ מהצורה:

$$y = y_0(x)\cdot z(x)$$

ונקבל מד"ר מסדר $n-1$ עבור $w = z'$.

<u>תרגיל:</u> נתון פתרון $y_0(x)$ עבור המשוואה ההומוג' המתאימה, מצא את הפתרון הכללי.

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3e^{3x} \\ y_0(x) = e^{2x} \end{cases}$$

<u>פתרון:</u> נציב $y = e^{2x}\cdot z$

$$y' = 2e^{2x}\cdot z + e^{2x}\cdot z'$$

$$y'' = 4e^{2x}\cdot z + 2e^{2x}\cdot z' + 2e^{2x}\cdot z' + e^{2x}\cdot z'' =$$

$$= 4e^{2x}\cdot z + 4e^{2x}\cdot z' + e^{2x}\cdot z''$$

נציב במד"ר ונקבל

$$4e^{2x}\cdot z + 4e^{2x}\cdot z' + e^{2x}\cdot z'' - 10e^{2x}\cdot z - 5e^{2x}\cdot z' + 6e^{2x}\cdot z = 3e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x}\cdot z'' - e^{2x}\cdot z' = 3e^{3x}$$

כעת נוכל להציב $w = z'$ להורדת הסדר,

$$w' = z''$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x}\cdot w' - e^{2x}\cdot w = 3e^{3x} \quad \rightarrow$$

משוואה לינארית לא הומוגנית

$$w = C_1 e^{x} + 3x e^{x} = z'$$

ע"י אינטגרל נקבל

$$z = C_1 e^{x} + 3(x-1)e^{x} + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{2x}\cdot\left(C_1 e^{x} + 3(x-1)e^{x} + C_2\right)$$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 3(x-1)e^{3x}}$$ פתרון