מבחן לדוגמא 2 – אנליזה מתקדמת ומד"ר - 2019

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

.1

א. קבעו האם הפונקציה הבאה רציפה בנקודה $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3\sin(y^4)}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3\sin\left(y^4\right)}{x^2+y^4}\right| \le \left|\frac{x^3\sin(y^4)}{x^2}\right| = |xsin(y^4)| \to_{(x,y)\to(0,0)} 0$$

אכן הפונקציה רציפה כיוון שהגבול בנקודה שווה לערך בנקודה.

ב. תהי $f(x,y)=x^2-xy+5$

מצאו את כל הנקודות בהן הנגזרת של הפונקציה בכיוון הוקטור $(1,2)$ היא חיובית.

צ"ל את הנוסחא לנגזרת כיוונית.

הנגזרת בנקודה (a,b) בכיוון $\vec{v}$ היא

$$\nabla f(a,b)\cdot\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

$$\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}=\frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$$

$$\nabla f(x,y)=\left(f_x,f_y\right)=(2x-y,-x)$$

אז רוצים ש

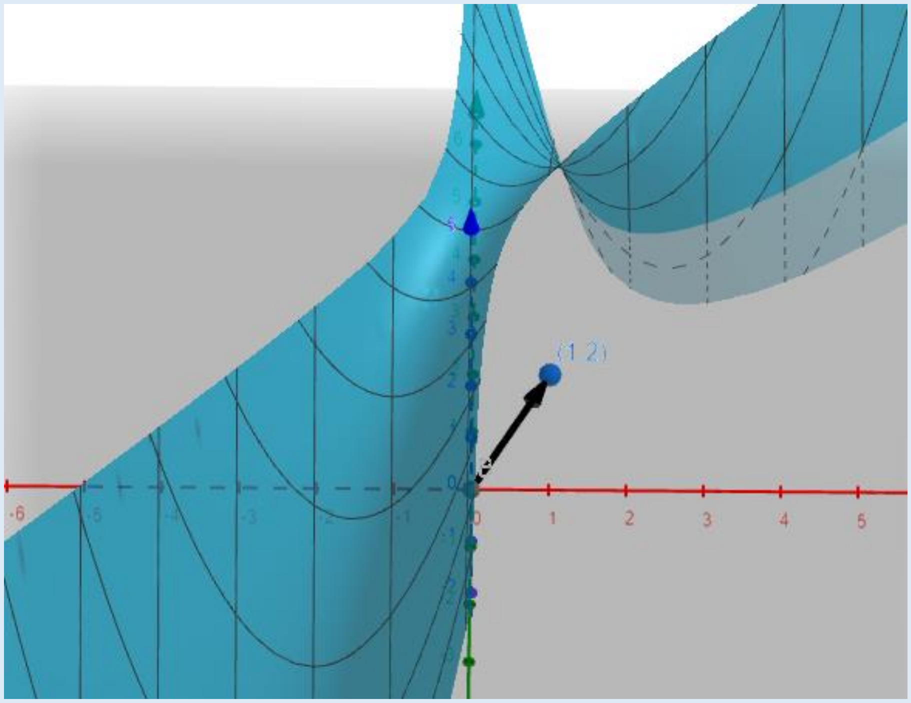
$$(2a-b,-a)\cdot\frac{(1,2)}{\sqrt{5}}>0$$

אפשר להפטר מה$\sqrt{5}$

$$2a-b+(-a)\cdot 2=-b>0$$

כלומר $b < 0$

סיכום: בכל הנקודות בהן הרכיב של ציר y שלילי, הנגזרת בכיוון $(1,2)$ חיובית.



2. מצאו וסווגו את הנקודות החשודות (מינ'/מקס' מקומי או אוכף) של הפונקציה $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$.

ראשית נחפש את הנקודות הקריטיות, כלומר הנקודות בהן הגרדיאנט מתאפס, כלומר הנקודות בהן שתי הנגזרות החלקיות מתאפסות

$$f_x = 3x^2 + 6x = 0$$

$$f_y = 3y^2 - 12y = 0$$

כלומר צ"ל ש

$$x(x+2) = 0$$

$$y(y-4) = 0$$

סה"כ מצאנו 4 נקודות בהן שתי הנגזרות מתאפסות

$$(0,0), (0,4), (-2,0), (-2,4)$$

כעת צריך לבדוק אם מדובר באוכף או בקיצון ומאיזה סוג

$$\Delta(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$f_{xx} = 6x + 6, \qquad f_{yy} = 6y - 12, \qquad f_{xy} = 0$$

$$\Delta(x,y) = (6x+6)(6y-12)$$

צריך להציב כל אחת מהנקודות

$$\Delta(0,0) = -6 \cdot 12 < 0$$

לכן $(0,0)$ היא אוכף

$$\Delta(0,4) > 0$$

לכן $(0,4)$ קיצון. כיוון ש $f_{xx}(0,4) > 0$ מדובר במיני' מקומי

$$\Delta(-2,0) > 0$$

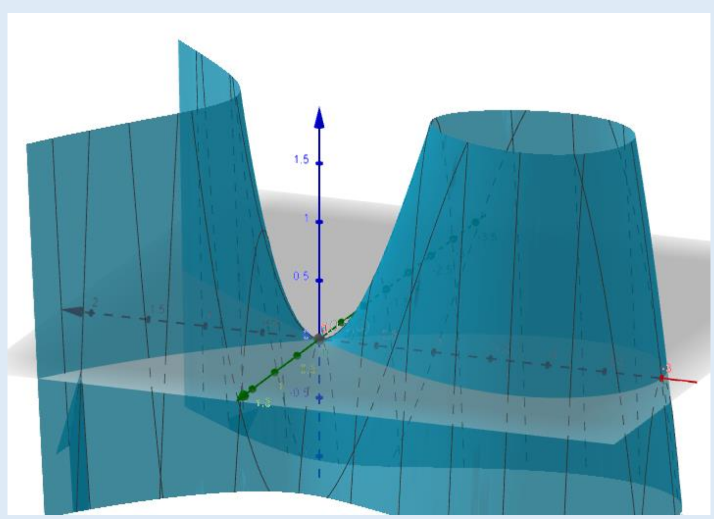
לכן $(-2,0)$ קיצון. כיוון ש $f_{xx}(-2,0) < 0$ מדובר במקס' מקומי

$$\Delta(-2,4) < 0$$

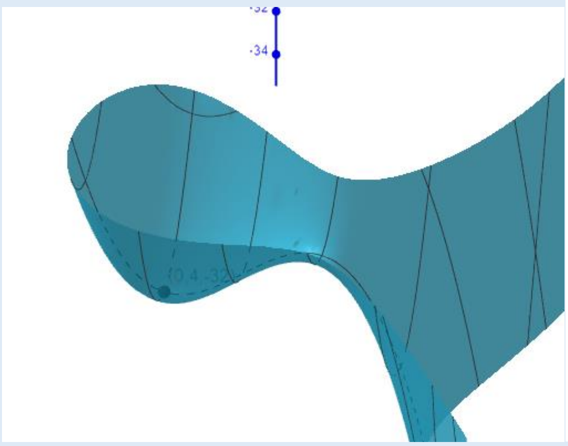
ולכן $(-2,4)$ אוכף

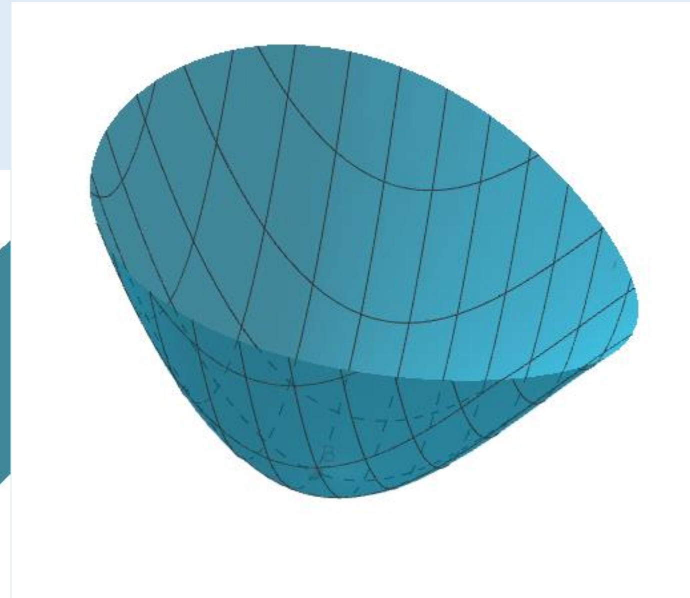
ציורים:

$(0,0)$

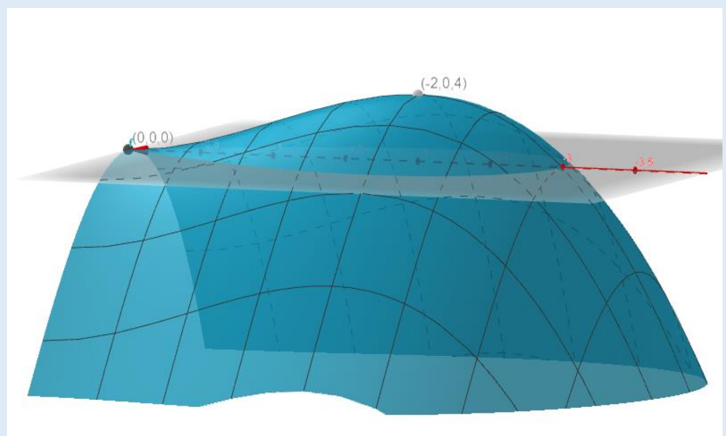


בנקודה $(0,4)$

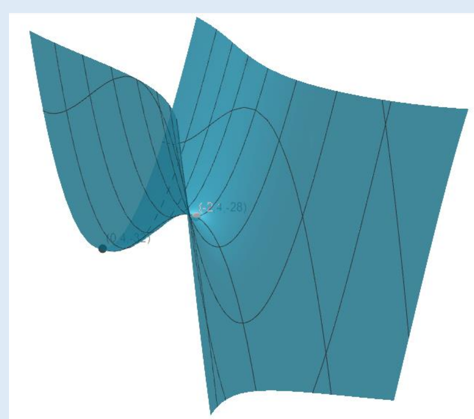




בנקודה $(-2,0)$



בנקודה $(-2,4)$



3. מצאו פתרון למד"ר $y'+x^2y'=1-y$ המקיים $y(0)=2$.

$$y'(1+x^2)=1-y$$

$$\frac{y'}{1-y}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{1+x^2}$$

נעשה אינטגרל לשני הצדדים

$$-\ln|1-y|=\arctan(x)+C$$

נציב את תנאי ההתחלה כבר עכשיו, ייתכן שנצרך להציבו שוב בהמשך.

$$-\ln(1)=0+C$$

$$C=0$$

$$\ln|1-y|=-\arctan(x)$$

$$|1-y|=e^{-\arctan(x)}$$

$$1-y=\pm e^{-\arctan(x)}$$

על מנת לקיים את תנאי ההתחלה (צד שמאל יוצא -1)

$$1-y=-e^{-\arctan(x)}$$

$$y=1+e^{-\arctan(x)}$$

4. מצאו פתרון למד"ר $2xyy'+\cos(x)=-y^2$ המקיים $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

נבדוק האם המד"ר מדוייקת

$$2xydy+(\cos(x)+y^2)dx=0$$

$$2y=2y$$

אכן מדובר במד"ר מדוייקת

$$U = \int 2xydy + c(x) = xy^2 + c(x)$$

$$U_x = y^2 + c'(x) = \cos(x) + y^2$$

$$c(x) = \sin(x)$$

$$U = xy^2 + \sin(x)$$

הפתרון נתון באופן סתום ע"י

$$xy^2 + \sin(x) = C$$

נציב תנאי התחלה (שוב אולי נצטרך להציב בסוף)

$$1 = C$$

$$xy^2 + \sin(x) = 1$$

$$y^2 = \frac{1 - \sin(x)}{x}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1 - \sin\,(x)}{x}}$$

5. מצאו פתרון למד"ר $xy''-xy'-y=0$ המקיים $y'(0)=1$, הביעו אותו באמצעות פונקציות אלמנטריות.

נציב טור חזקות.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) k a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots$$

$$xy' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots$$

$$xy'' = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)ka_kx^{k-1} = \begin{Bmatrix} m = k-1 \\ k = m+1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)a_{m+1}x^m = 2a_2x + 6a_3x^2 + 12a_4x^3 + \cdots$$

נציב את הטורים במד"ר

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k = 0$$

$$-a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(k(k+1)a_{k+1} - ka_k - a_k)\,x^k = -a_0 + (2a_2 - 2a_1)x + (6a_3 - 3a_2)x^2 + \cdots = 0$$

לכן

$$-a_0 = 0$$

ולכל $k \geq 1$

$$k(k+1)a_{k+1} - ka_k - a_k = 0$$

עד כה גילינו כי

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$$

$$y'(0) = a_1 = 1$$

כלומר

$$y = x + a_2x^2 + \cdots$$

ראינו שלכל $k \geq 1$ מתקיים כי

$$k(k+1)a_{k+1} - ka_k - a_k = 0$$

נפשט את זה

$$k(k+1)a_{k+1} - a_k(k+1) = 0$$

$$ka_{k+1} = a_k$$

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{k}$$

נציב $k = 1$ ונקבל

$$a_2 = \frac{a_1}{1} = 1$$

נציב $k = 2$ ונקבל

$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3} = \frac{1}{3!}$$

ואפשר להוכיח שבאופן כללי הנוסחא היא

$$a_{k+1} = \frac{1}{k!}$$

כלומר

$$y = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3!} + \cdots = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = xe^x$$