בוחן – 83-112 חדו"א 1 להנדסה (קורס חוזר) –10/04/22

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שעה וחצי | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על סעיף אחד מכל שאלה | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את אחד הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^3+sin(x^7))\cdot\ln(1+x^3)\cos(x^4)}{(1-\cos(2x))^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3+\sin(x^7))}{x^3+\sin(x^7)}\cdot(x^3+\sin(x^7))\cdot\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\cdot\cos(x^4)\cdot\left(\frac{(2x)^2}{1-\cos(2x)}\right)^3\cdot\frac{x^3}{2^6x^6}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x^3+\sin(x^7))}{x^3+\sin(x^7)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^3+\sin(x^7)}{x^3}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos(x^4)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{(2x)^2}{1-\cos(2x)}\right)^3}_{2^3}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{2^3}{2^6}=\frac{1}{8}$$

כאשר

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+\sin(x^7)}{x^3}=\lim_{x\to 0}1+\frac{\sin(x^7)}{x^7}\cdot x^4=1+1\cdot 0=1$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-e^{-x})^{\sqrt{x^2+1}-x}$

נתחיל מהמעריך

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\to_{x\to\infty}0$$

כעת נחזור לגבול בשאלה

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-e^{-x})^{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}}=\lim_{x\to\infty}(e^x-e^{-x})^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}}=\lim_{x\to\infty}\left((e^x-e^{-x})^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-e^{-x})^{\frac{1}{x}}=\{\infty^0,\text{אילן}\}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left((e^x-e^{-x})^{\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln(e^x-e^{-x})}{x}}=e$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x-e^{-x})}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=1$$

ג. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

נשתמש בכלל המנה (מדובר בסדרה חיובית)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2 \cdot \frac{n^n \cdot (n+1)}{(n+1)^{n+1}} = 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1$$

כיוון שגבול המנה קטן מאחד הסדרה המקורית שואפת לאפס.

2.

א. חשבו את $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^3}\, dx$.

מדובר באינטגרל על פונקציה רציונאלית.

דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה ולכן נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$x^2+x+1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

נפתח סוגריים ונשווה מקדמים

$$x^2+x+1 = A(x^2+2x+1) + B(x+1) + C$$

קבוע	$1 = A + B + C$
x	$1 = 2A + B$
x^2	$1 = A$

לכן $A = 1$

לכן $B = -1$

ולכן $C = 1$

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

ולכן

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^3} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + C$$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{x}{e^x}dx$.

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x}dx = \begin{Bmatrix} f' = e^{-x} & g = x \\ f = -e^{-x} & g' = 1 \end{Bmatrix} = [-xe^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^\infty = \left(\lim_{t\to\infty} -e^{-t}(t+1)\right) - (-e^{-0}) = 1$$

כאשר

$$\lim_{t\to\infty} -e^{-t}(t+1) = \lim_{t\to\infty} -\frac{t+1}{e^t} = 0$$

לפי סדרי גודל או לופיטל.

3.

א. יהי $a \in \mathbb{R}$, מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = -\frac{x^3}{3} - x + a$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + x - a$$

$$h'(x) = e^x + x^2 + 1 > 0$$

הפונקציה תמיד עולה, ולכן לכל היותר חיתוך אחד עם ציר האיקס.

$$\lim_{x\to\infty} e^x + \frac{x^3}{3} + x - a = \infty$$

לכן יש נקודה אחת מעל הציר.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x + \frac{x^3}{3} + x - a = \{0 - \infty - \infty - a\} = -\infty$$

לכן יש נקודה מתחת לציר.

בין שתי הנקודות שמצאנו הפונקציה רציפה כצירוף של אלמנטריות ולכן לפי משפט ערך הביניים יש חיתוך עם הציר.

סה"כ חיתוך יחיד עם הציר, ולכן פתרון יחיד למשוואה המקורית.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x(2-x) = e$.

שוב נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = e^x(2-x) - e$$

$$h'(x) = e^x(2-x) + e^x \cdot (-1) = e^x(1-x)$$

בבירור הנגזרת חיובית כאשר $x < 1$ ושלילית כאשר $x > 1$

סה"כ הפונקציה עולה בתחום $(-\infty, 1]$ ויורדת בתחום $[1, \infty)$

ולכן יש מקסימום גלובאלי ב$x = 1$

$$h(1) = e^1(2-1) - e = 0$$

לכן יש נקודת חיתוך יחידה.

4. תהי f כך ש $\lim_{x\to 0} f(x) = c$ כאשר $0 < c \in \mathbb{R}$.

א. הוכיחו או הפריכו: קיים $r > 0$ כך שלכל $x_0 \in (-r, r)$ מתקיים כי $\lim_{x\to x_0} (x - x_0) f(x) = 0$

הוכחה:

עבור הסביבה $\left(\frac{c}{2}, \frac{3c}{2}\right)$ של c קיים $r > 0$ כך שלכל $x \in (-r, r)$ מתקיים כי

$$\frac{c}{2} < f(x) < \frac{3c}{2}$$

כלומר הפונקציה <u>חסומה</u> בתחום זה

ולכל $x_0 \in (-r, r)$ יש סביבה מסביב לx_0 שמוכלת בתוך הקטע $(-r, r)$

בתוך סביבה זו הפוקציה חסומה ולכן

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0) f(x) = \{0 \cdot \text{חסומה}\} = 0$$

ב. הוכיחו או הפריכו: קיים $r > 0$ כך שלכל $x_0 \in (-r, r)$ מתקיים כי $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{x - x_0} = \infty$

הוכחה:

בהמשך לבנייה החכמה שעשינו בסעיף א', בתוך הסביבה של x_0 מתקיים כי $f(x)$ לא רק חסומה, אלא גם חיובית.

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{x - x_0} \geq \lim_{x\to x_0^+} \frac{\frac{c}{2}}{x - x_0} = \left\{\frac{\frac{c}{2}}{0^+}\right\} = \infty$$

(האי שיוויון הראשון חוקי כי הכל חיובי) וסיימנו לפי חצי סנדוויץ'.

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = 2a_n + a_n^2 + 1$ (אין נתון לגבי ערך האיבר הראשון בסדרה).

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n + 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

כלומר מדובר בפרבולה מחייכת ומרחפת ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $x^2 + x + 1 > 0$

ולכן

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n + 1 > 0$$

כלומר הסדרה עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

כיוון שהסדרה עולה, או שהיא חסומה ומתכנסת למספר סופי או שאינה חסומה ושואפת לאינסוף.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, נסמן $a_n \to L \in \mathbb{R}$, נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה:

$$\lim a_{n+1} = \lim 2a_n + a_n^2 + 1$$

$$L = 2L + L^2 + 1$$

$$L^2 + L + 1 = 0$$

אבל ראינו שאין למשוואה זו פתרון!

בסתירה לכך שהסדרה חסומה, ולכן סה"כ $a_n \to \infty$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}$$

זו סדרת סכומי רימן של $f(x) = x$ הרציפה בקטע $[0,1]$ עם חלוקת הקטע לn קטעים שווים, ובחירת הצד הימני של כל קטע כנקודה.

לכן סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל

$$a_n \to \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ב. קרבו את e עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נשתמש בפונקציה $f(x) = e^x$, הנקודה הרצוייה היא $x = 1$ והמצוייה היא $x_0 = 0$

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$$R_n = \frac{e^c}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$$

כאשר $0 < c < 1$

כיוון ש e^x פונקציה עולה

$$e^0 < e^c < e^1 = e < 4$$

ולכן סה"כ

$$0 < R_n < \frac{4}{(n+1)!}$$

עבור $n = 5$ נקבל

$$|R_n| = R_n < \frac{4}{6!} = \frac{1}{180} < \frac{1}{100}$$

נציב בפולינום הטיילור של e^x ונקבל

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$