תרגיל בית 4

שאלה 1

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $A,B \subseteq V$ תת קבוצות ו W תת מרחב, הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $\mathrm{Span}(A \cup W \cup B)=\mathrm{Span}(A) \cup \mathrm{Span}(W) \cup \mathrm{Span}(B)$.

ב. $\mathrm{Span}(A \cup W \cup B)=(\mathrm{Span}(A)+\mathrm{Span}(B)) \cup W$.

ג. $\mathrm{Span}(A \cup W \cup B)=\mathrm{Span}(A)+\mathrm{Span}(B)+W$.

ד. $\mathrm{Span}(A \cup W \cup B)=A+B+W$.

שאלה 2

נתון: $U=\{(z+\overline{z}, z, -i\mathrm{Re}(z)) \mid z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^3$

א. האם U תת מרחב של $\mathbb{C}^3$ כמ"ו מעל 1. $\mathbb{C}$ 2. $\mathbb{R}$

אם כן, הוכח/י ומצא/י בסיס ומימד עבור U.

אם לא, ספק/י דוגמא נגדית.

ב. תהיי $T=\{(1, 1+i, 2), (1-i, -1, -1-2i), (i, -1, i)\}$

בדוק/י האם $v=(1, -1+i, 0)$ שייך ל-$\mathrm{Span}(T)$, האם T תלויה ליניארית,

מה המימד של $\mathrm{Span}(T)$, $\mathrm{Span}(T \cup \{v\})$.

i. כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

ii. כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 3

יהיו $U=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_1=a_2=...=a_n\}; V=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_1+a_2+...+a_n=0\}$ כך ש $(a_1,a_2,...,a_n) \in \mathbb{R}^n$.

הוכיחו ש U,V תת-מרחבים של $\mathbb{R}^n$.

שאלה 4

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ונגדיר $V_A := \{B \in \mathbb{F}^{n\times n} : BA = AB\}$.

א. הוכח ש V_A תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ב. הוכח ש V_A סגור גם לכפל מטריצות.

שאלה 5

נסמן: $U = \{(\alpha,\beta,\gamma) | \alpha+\beta+\gamma=0\}$ ו- $W = span(\{(1,2,3),(0,1,3)\})$

מצאו בסיס ומימד לתת מרחבים U, W, $U+W$, $U \cap W$.

שאלה 6

יהיו U, W תת מרחבים מ- $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, $W = span\left\{\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$.

מצאו בסיס ומימד לתת מרחבים U, W, $U+W$, $U \cap W$.

<u>שאלה 7</u>

יהיו W,U תת-מרחבים של מרחב וקטורי V. הוכח:

אם $U \not\subset W \wedge W \not\subset U$ אז $U \cup W$ אינו תת-מרחב.

<u>שאלה 8</u>

עבור אילו ערכים של a הקבוצה $\{(a,a,1-a),(a,a^2,1-a^2),(2a,a+a^2,2-2a)\}$ מהווה בסיס ל $\mathbb{R}^3$.

<u>שאלה 9</u>

נתונה הקבוצה $\{v_1,v_2\}=\{(1,0,1),(1,1,1)\}$.

א. מצאו וקטורים v_3,v_4 שאינם תלויים ליניארית, כך ש- $B_2=\{v_1,v_2,v_4\},B_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ הם בסיסים ל $\mathbb{R}^3$.

ב. מצאו את הקואורדינטות של הווקטור $v=(2,1,1)$ לפי שני הבסיסים השונים.

<u>שאלה 10</u>

הוכיחו או הפריכו:

א. נתון U,W תת מרחבים של $\mathbb{R}^4$, $\dim(U)=2$, $\dim(W)=3$, $U \not\subset W$.
אז $\dim(U \cap W)=1$.

ב. אם $U=span\{(1,1,0,0),(2,3,1,1),(2,4,2,2)\}$ אז קיים תת מרחב W כך ש $\dim(W)\geq 2$ ו $U \cap W=\{0\}$.