התמרת לפלס

הגדרה

תהי $f(t)$ פונק' המוגדרת בתחום $t \in (0,\infty)$. נגדיר פורמאלית:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) := \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

סימונים נוספים הם $F(s), \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}, \mathcal{L}(f)$
לדוגמה עבור הפונק $f(t)=1$

$$\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t=a} = \frac{e^{-s\infty}}{-s} - \frac{e^{0}}{-s} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$$

סימון מקוצר להתמרת לפלס של פונקציה מסויימת $f(t), g(t), x(t), y(t)$ הוא אותה האות, רק גדולה(במילים אחרות - CAPS-LOCK)

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s) = G(s)$$

וכו'.

למשתנה t נהוג לקרוא משתנה הזמן ("time") ולמשתנה s נהוג לקראו משתנה התדר ("frequency"). התמרת לפלס נותנת לנו לקפץ בין שני העולמות האלה.

הערה

הנוסחה התמרת לפלס הפוכה נראית ככה:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(s)\, e^{st}\,\mathrm{d}s$$

זה מסובך מאוד, ובקורס הזה לא נלמד את זה, ונבצע התמרות הפוכות לפי התמרות ידועות.

שאלה

האם לכל פונקציה יש התמרת לפלס?

תשובה

לא! נתבונן בפונקציה $f(t)=e^{t^2}$ ונרשום פורמאלית

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{t^2}e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{t^2-st}\,\mathrm{d}t$$

האם קיים s שעבורו זה מתכנס? ננסה למשל $s=0$:

$$F(0)=\int_0^\infty e^{t^2}\,\mathrm{d}t=\infty$$

נרצה להראות התבדרות לכל s. כדי להראות זאת נביא תזכורת מאינפי:

למה: אם $\varphi(t)$ הינה פונקציה חיובית(למשל e^{t^2-st}) ו a,b מספרים ממשיים כך ש$a\le b$ אזי

$$\int_a^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t\ge\int_b^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

מסקנה:

$$\int_0^\infty e^{t^2-st}\,\mathrm{d}t\ge\int\limits_{\max(0,s)\ge 0}^{\infty} e^{t^2-st}\overset{(*)}{\ge}\int\limits_{\max(0,s)}^{\infty} e^{0}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\max(0,s)}^{\infty}=\infty$$

$(*)$מתי $t(t-s)=t^2-st>0$? זאת פרבולה שחותכת את ציר t עבור $t_{1,2}=0,s$.
בכל מקרה אם $t>\max(0,s)$ אזי $t^2-st\ge 0$ והאי שוויון מוצדק.
קיבלנו שלא קיימת התמרת לפלס בשום נקודה.

מספר תכונות של התמרת לפלס

א) $\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s)=\alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s)+\beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s)=\alpha F(s)+\beta G(s)$

ב) $$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=-F'(s)$$

ג) $$\mathcal{L}\{t^nf(t)\}(s)=(-1)^nF^{(n)}(s)$$

דוגמה: $n=0$

$$\mathcal{L}\left\{t^2f(t)\right\}=\mathcal{L}\{t(tf(t))\}=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\}=-\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}F(s)\right]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)=(-1)^2F^{(2)}(s)$$

ד) $$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)=sF(s)-f(0)$$

ה) $\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\}(s)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

ו)

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s)=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-...-f^{(n-1)}(-)=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^{(k)}(0)$$

ז) $\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}(s)=F(s-a)$

ח) $\mathcal{L}\left\{f(t-c)H(t-c)\right\}(s)=e^{-cs}F(s)$

כזכור, פונקציית Heaviside מוגדרת ע"י $H(t):=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$. הפונקציה הזו "מתה" עבור ערכים שליליים.
פונקציית הביסייד המוזזת היא

$$H_c(t):=H(t-c)=\begin{cases}1 & t-c>0\\ 0 & t-c<0\end{cases}=\begin{cases}1 & t>c\\ 0 & t<c\end{cases}$$

פונקציית הביסייד עספ שני אינדקסים a,b:

$$H_{a,b}(t):=\begin{cases}1 & a<t<b\\ 0 & t<a\vee t>b\end{cases}=H_a(t)-H_b(t)=H(t-a)-H(t-b)$$

שימוש

אם הפונקציה $f(t)$ מוגדרת למקוטעין:

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t) & a_1<t<b_1\\ f_2(t) & a_2<t<b_2\\ \vdots & \\ f_n(t) & a_n<t<b_n\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

(קטעים זרים - $\forall_{i\neq j}\,(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\emptyset$)
נוכל לרשום אותה בצורה

$$f(t)=f_1(t)H_{a_1,b_1}(t)+f_2(t)H_{a_2,b_2}(t)+...+f_n(t)H_{a_n,b_n}(t)$$

הערה חשובה

גם התמרת לפלס ההפוכה $\mathcal{L}^{-1}$ היא לינארית.

הוכחה

ניקח את (א)

$$\alpha F(s)+\beta G(s)=\mathcal{L}\left\{\alpha f(t)+\beta g(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\alpha F(s)+\beta G(s)\right\}=\alpha f(t)+\beta g(t)=\alpha\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}+\beta\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}$$

תרגיל

פתור ע"י שיטת התמרת לפלס את הבעיות הבאות(המשתנה הבלתי תלוי הוא t ולא x)

א)

$$\begin{cases} y''-4y'+8y=e^{2t} \\ y(0)=-2 \\ y'(0)=s \end{cases}$$

פתרון

נפעיל התמרת לפלס

$$y''-4y'+8y=e^{2t}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''-4y'+8y\right\}(s)=\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\}-4\mathcal{L}\left\{y'\right\}+8\mathcal{L}\left\{y\right\}=\frac{1}{s-2}$$

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]-4\left[sY(s)-y(0)\right]+8\left[Y(s)\right]=\frac{1}{s-2}$$

$$\left[s^2Y(s)+2s-5\right]-4\left[sY(s)+2\right]+8Y(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$\left(s^2-4s+8\right)Y(s)+2s-13=\frac{1}{s-2}$$

זאת אפילדו לא משוואה דיפרנציאלית!

$$Y(s)=\frac{1}{(s-2)\left(s^2-4s+8\right)}-\frac{2s}{s^2-4s+8}+\frac{13}{s^2-4s+8}$$

$$(y\left(t\right)=)\,y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-2\right)\left(s^2-4s+8\right)}-\frac{2s}{s^2-4s+8}+\frac{13}{s^2-4s+8}\right\}(t)$$

$$y=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-2\right)\left(s^2-4s+8\right)}\right\}}_{I}-2\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4s+8}\right\}}_{II}+13\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4s+8}\right\}}_{III}$$

- נתחיל בחישוב III:

$$\frac{1}{s^2-4s+8}=\frac{1}{\left(s-2\right)^2+4}=\frac{1}{\left(s-2\right)^2+2^2}=\mathcal{L}\left\{\sin\left(2t\right)\right\}\left(s-2\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin\left(2t\right)\right\}\left(s-2\right)=\frac{2}{\left(s-2\right)^2+2^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4s+8}\right\}=e^{2t}\cdot\frac{1}{2}\sin\left(2t\right)$$

- חישוב II:

$$\frac{s}{s^2-4s+8}=\frac{s}{\left(s-2\right)^2+2^2}=\frac{s-2+2}{\left(s-2\right)^2+2^2}=\frac{s-2}{\left(s-2\right)^2+2^2}+\frac{2}{\left(s-2\right)^2+2^2}$$

ולכן $\mathcal{L}\left\{\cos\left(at\right)\right\}\left(s\right)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4s+8}\right\}=e^{2t}\cos\left(2t\right)+e^{2t}\sin\left(2t\right)$$

- חישוב I:
  נפרק לגורמים חלקיים:

$$\frac{1}{\left(s-2\right)\left(s^2-4s+8\right)}=\frac{A}{s-2}+\frac{Bs+c}{s^2-4s+8}$$

$$0s^2+0s+1=A\left(s^2-4s+8\right)+\left(bs+C\right)\left(s-2\right)=\left(A+B\right)s^2+\left(-4A-2B+C\right)s+\left(8A-2C\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} A+B=0 & \Rightarrow & B=-A\\ -4A-2B+C=0 & \Rightarrow & -2A+C=0\\ 8A-2C=1 & \Rightarrow & 8A-2C=1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{c}-4A+2C=0\\ 8A-2C=1\end{array}\right\}+$$

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow B = -\frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

לכן:

$$\frac{1}{(s-2)\left(s^2-4s+8\right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{s-2}{s^2-4s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)\left(s^2-4s+8\right)}\right\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+2^2}\right\} = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}\cos 2t$$

לסיכום: מפשטים את

$$y = I - 2II + 13III = ...$$