## הגדרה - יחס שקילות

יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

## הגדרה - מחלקת שקילות

תת קבוצה המכילה את כל האיברים השקולים אלו לאלו.

### סימון

$$[a] = \{x | xRa\}$$

$a$ הוא איבר מייצג

### דוגמה

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \mod 2$$

$$aRb \Leftrightarrow a \mod 2 = b \mod 2$$

עבור יחס הזוגיות מעל $\mathbb{N}_0$, מהן מחלקות השקילות?

$$[0] = \{x | x \mod 2 = 0\} \qquad [1] = \{x | x \mod 2 = 1\}$$

## הגדרה - יחס שקילות אינווריאנטי מימין

$R_L$ - מעל $\Sigma^*$, לכל $x, y \in \Sigma^*$, אם לכל $z \in \Sigma^*$, $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ אז $xR_Ly$.
$(x, y) \in R_L$ אם לכל סיומת בעולם שנשרשר להן לא נוכל להבחין ביניהן. כלומר נקבל מילים $xz, yz$ שמתנהגות תמיד אותו הדבר, כלומר שתיהן ב$L$ או שתיהן לא ב$L$.

## משפט נרוד

- אם מספר מחלקות השקילות של $R_L$ סופי ושווה ל$n$, אז $L$ רגולרית, ומספר המצבים באוטומט המינימלי(הדטרמיניסטי)שווה ל$n$.
- אם מספר מחלקות השקילות אינסופי אז השפה אינה רגולארית.

## שימוש במשפט

1. זיהוי והגדרת מחלקות שקילות.
2. הבנה מודע כל מחלקה היא מחלקת שקילות.
3. האם חילקנו את כל $\Sigma^*$?
4. הצגת מפרידים.

## דוגמה

מצאו מחלקות השקילות $R_L$ עבור $L = \left\{ w \middle| \begin{array}{c} w \text{ starts with } ab \\ w \text{ ends with } b \end{array} \right\}$

נזהה את המחלקות:

- $[\varepsilon] = \varepsilon$
- $[a] = a$
- $[b] = (b + aa)(a + b)^*$ - כל המילים שפותחות ב$b$ או ב$aa$
- $[ab] = ab + ab(a + b)^* b$ - כל המילים הפותחות ב$ab$ ומסתיימות ב$b$
- $[aba] = ab(a + b)^* a$ - כל המילים הפותחות ב$ab$ ומסתיימות ב$a$

האם כיסינו את כל $\Sigma^*$?

- מילים באורך 0 $\Leftarrow$ כן, $\varepsilon \in [\varepsilon]$.
- מילים באורך 1 $\Leftarrow$ $a \in [a], b \in [b]$.
- מילים באורך 2 ומעלה:
  - מתחילות ב$aa$(כולל $aa$ עצמו) - במחלקה $[b]$.
  - מתחילות ב$ab$:
    - $ab \in [ab]$
    - מסתיים ב$a$ - $[aba]$
    - מסתיים ב$b$ - $[ab]$
  - מתחילות ב$bb$ או $ba$ - נמצאות ב$[b]$.

נראה טבלת מפרידים:

| | $aba$ | $b$ | $ab$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | $b$ | $ab$ | $\varepsilon$ | $b$ |
| $a$ | $ab$ | $b$ | $\varepsilon$ | |
| $ab$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | | |
| $b$ | $b$ | | | |

נניח שחשבנו $[b]$=פותח ב$b$ ו$[aa]$=פותח ב$aa$ - אין מפריד ולכן זו אותה מחלקת שקילות.

## דוגמה להוכחת אי רגולריות

הוכח ע"י נרוד $L$ לא רגולרית $L=\{a^nb^n|n\geq 0\}$
נסתכל על הקבוצה האינסופית $w_i=a^i$. לכל זוג $w_i,w_j$, $i\neq j$, קיים $z=b^i$ ונקבל

$$w_i\cdot z=a^ib^i\in L$$

$$w_j\cdot z=w^jb^i\notin L$$

$\Leftarrow$ $w_i\not R_L w_j$ ולכן יש אינסוף מחלקות שקילות $\Leftarrow$ $L$ לא רגולארית ע"פ נרוד.

## מוטיבציה - שימוש במשפט נרוד לצמצום אוטומט

אם לכל $z$,

$$xz\in L\Leftrightarrow yz\in L$$

אז $x,y$ בלתי מובחנים, וניתן לאחד את מצביהם.

## אלגוריתם לצמצום אוטומט

**קלט:** אוטומט סופי <u>דטרמיניסטי</u> מלא $A$

**פלט:** אוטומט סופי דטרמיניסטי מצומצם(מינימאלי)

- יחס שקילות $E_k$ מעל $Q$ המוגדר ע"י:

  יהיו $q_1,q_2\in Q$. אם לכל $x\in\Sigma^*$, $k\geq|x|$ מתקיים $\begin{bmatrix}\delta(q_1,x)\in F\\ \Updownarrow\\ \delta(q_2,x)\in F\end{bmatrix}$ אז $(q_1,q_2)\in E_k$.

  זה אומר ש$q_1,q_2$ בלתי מובחנים ע"י מילים באורך קטן או שווה $k$.

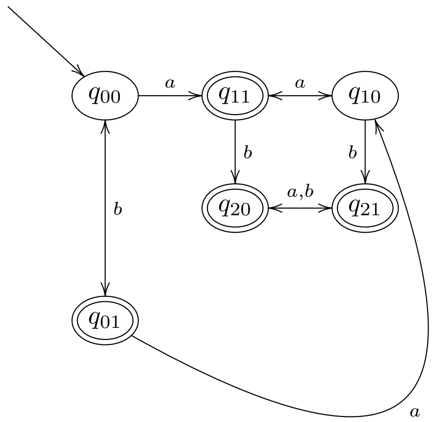
שימו לב שמתקיימת התכונה הבאה:
אם $(q_1,q_2)\in E_k$, וגם לכל $\sigma\in\Sigma$, $(\delta(q_1,\sigma),\delta(q_2,\sigma))\in E_k$, אז $(q_1,q_2)\in E_{k+1}$.

### האלגוריתם לצמצום אוטומט:

- חשב $E_0$
- חשב $E_1$
- כל עוד $E_i\neq E_{i-1}$ המשך לחשב $E_{i+1}$.

## דוגמה

צמצמו את האוטומט הבא:




נסמן בטבלה את היחסים $E_i$ ואת מחלקות השקילות שלהן:

$$\begin{array}{lll}
E_0 & \Pi_0 & = \left\{ \overbrace{\{q_{00}, q_{10}\}}^{\text{not accepting}}, \overbrace{\{q_{01}, q_{11}, q_{20}, q_{21}\}}^{\text{accepting}} \right\} \\
E_1 & \Pi_1 & = \{\{q_{00}, q_{10}\}, \{q_{01}\}, \{q_{11}\}, \{q_{20}, q_{21}\}\} \\
E_2 & \Pi_2 & = \{\{q_{00}\}, \{q_{10}\}, \{q_{01}\}, \{q_{11}\}, \{q_{20}, q_{21}\}\} \\
E_3 & \Pi_3 & = \{\{q_{00}\}, \{q_{10}\}, \{q_{01}\}, \{q_{11}\}, \{q_{20}, q_{21}\}\}
\end{array}$$

- נשים לב שעבור $E_2$ ומעלה, מספיק לבדוק מילים של אות אחת, ולראות אם הם באותה מחלקת שקילות ב$E$ הקודמת. למשל עבור $q_{00}, q_{10}$, בקריאת האות $a$ הם מגיעים ל$q_{01}, q_{21}$ בהתאמה ־ שאמנם שניהם מצבים מקבלים, אבל $q_{01}\cancel{E_1}q_{21}$.

$\Leftarrow$ $\Pi_2 = \Pi_3$ ולכן עצרנו

$\Leftarrow$ נאחד את המצבים שנמצאים באותה מחלקת שקילות לקבלת האוטומט המינימאלי: