בחינת סיום (מועד א') בקורס
מבנים דיסקרטיים להנדסה (83217)

מרצה: ד"ר נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.
נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 5 נקודות וסעיפים ב' וג' שווים 10 נקודות כל אחד.
אין להשתמש בחומר עזר.
בהצלחה!

שאלה 1

א. הגדר: תת חבורה.
ב. תהי $(G,\cdot)$ חבורה קומוטטיבית, ותהיינה H_1, H_2 תתי חבורות של G. הוכח כי $H_1 \cdot H_2 = \{h_1 \cdot h_2 | h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ היא תת חבורה של G.
ג. האם טענת סעיף ב' נכונה בהכרח גם עבור חבורה לא קומוטטיבית G? הוכח או תן דוגמה נגדית.

שאלה 2

א. הגדר: סדר של איבר בחבורה.
ב. תהי G חבורה ויהי $a \in G$ איבר מסדר n. נניח שמתקיים $n = mk$. הוכח כי a^m הוא איבר מסדר k ב- G.
ג. האם החבורות $(R, +)$ [כלומר, הממשיים עם פעולת חיבור] ו- $(R - \{0\}, \cdot)$ [כלומר, הממשיים ללא אפס עם פעולת כפל] הן איזומורפיות? הוכח את קביעתך.

שאלה 3

א. הגדר: אלגוריתם אוקלידס לפולינומים.
ב. מצא את המחלק המשותף המקסימלי של הפולינומים $f(x) = x^5 + x^2$ ו- $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x$ מעל השדה Z_2, והצג אותו כצירוף שלהם.
ג. מצא את ההפכי של האיבר 13 בחבורה הכפלית $(Z_{101}^*, \cdot)$.

שאלה 4

א. הגדר: אידאל בחוג קומוטטיבי.
ב. יהי R חוג קומוטטיבי, ויהי $a \in R$. הוכח כי אם $\{ar : r \in R\} = R$ אז a הפיך.
ג. יהי $Q[x]$ חוג הפולינומים עם מקדמים רציונליים (עם פעולות חיבור וכפל נקודתי). נגדיר $\mathrm{I} = \{\mathrm{f} \in \mathrm{Q}[\mathrm{x}] : \mathrm{f}(2) = 0\}$. האם I הוא אידאל של $Q[x]$?

שאלה 5

א. הגדר: איחוד של שפות.
ב. הוכח כי אם השפות $L_1, L_2, \ldots, L_n$ הן רגולריות, אז גם האיחוד $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ הוא שפה רגולרית.
ג. האם טענת סעיף ב' נכונה גם לגבי איחוד אינסופי של שפות: $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$? הוכח או תן דוגמה נגדית.