28.7.2021

פונקציות.

1. קבעו האם הפונקציות הבאות חח"ע? האם על?

(א) היו פה סעיפים מהתירגול הקודם...

(ב) $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $f\left((n,m)\right)=n-m$.

פתרון: לא חח"ע כי $f(2,1)=1=f(3,2)$ וכמובן ש $(3,2)\neq(2,1)$.

על: הוכחה יהא $y\in\mathbb{Z}$ צריך למצוא לו מקור:

- אם $y<0$ אזי נגדיר $m=-y+1\in\mathbb{N}$ ו $n=1$ ואז

$$f\left((n,m)\right)=n-m=1-(-y+1)=y$$

ומצאנו מקור ל y.

- $y=0$: יש לו מקור, למשל $n=m=1$.
- $y>0$: יש לו מקור, למשל $n=y+1,m=1$ (שניהם טבעיים) ואז

$$f\left((n,m)\right)=n-m=(y+1)-1=y$$

(ג) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $f(x)=\frac{1}{x}$.

פתרון: לא פונקציה! כי $f(0)$ לא מוגדר.

(ד) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת $f(n)=n-1$

פתרון: לא פונקציה! כי $f(1)=0$ ו 0 אינו בטווח!

(ה) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת $f(z)=\sqrt{z}$

פתרון: לא פונקציה! כי $f(-1)$ שווה למה? יכול להיות ל i (כי $i^2=-1$) ויכול להיות ל $-i$ (כי $(-i)^2=-1$).

הערה $f:\mathbb{R}_{\geq0}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $f(x)=\sqrt{x}$ כן מוגדרת בגלל המוסכמה שלוקחים את השורש האי-שלילי.

2. מצאו פונקציות עם התכונות הבאות:

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהיא חח"ע שאינה על.

פתרון: למשל $f(x)=2^x$. היא חח"ע (כי מוכיחים באינפי או במקור אחר) והיא לא על כי ל -1 אין מקור (לכל x ממשי $f(x)=2^x>0$).

פתרון של תמר:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$

היא חח"ע (תוכיחו!) והיא לא על כי ל 0 אין מקור.

(ב) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהיא על שאינה חח"ע.

פתרון:

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\in\mathbb{N}\\ x & x\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

f אינה חח"ע כי $f(1)=0=f(0)$ ו $1\neq 0$.

בנוסף f על - הוכחה: יהא y בטווח (ממשי).

אם y טבעי, מקור שלו יהיה $x=y+1$. אם y אינו טבעי, אז מקור שלו יהיה $x=y$

3. תזכורת: תהא $f:X\to Y$ פונקציה, A ת"ק של X ו B ת"ק של Y

$$f(x)\in B \iff x\in f^{-1}[B]$$

$$\exists a\in A:\ f(a)=y \iff y\in f[A]$$

4. חשבו תמונה ותמונה הפוכה לפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $f(x)=x^2$

(א)

$$f[\{1,5\}]=\{f(1),f(5)\}=\{1,25\}$$

(ב)

$$f[(1,5)]=(1,25)$$

(ג)

$$f[(-5,5)]=[0,25)$$

(ד)

$$f^{-1}[\{0,1,4\}]=\{0,1,-1,2,-2\}$$

(ה)

$$f^{-1}[\{0,-1,-4\}]=\{0\}$$

(ו)

$$f^{-1}[\mathbb{R}]=\mathbb{R}$$

(ז)

$$f[\mathbb{R}] = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

(ח)

$$f^{-1}[(-4,-3) \cup (-2,0)] = \emptyset$$

5. תוכיחו לבד (אם לא ראיתם בהרצאה) שעבור $f : X \to Y$ מתקיים:

(א) לכל $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$ בתחום, מתקיים $f[A_1] \subseteq f[A_2]$

(ב) לכל $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$ בטווח, מתקיים $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$

6. תהא $f : X \to Y$.

(א) הפריכו: לכל A_1, A_2 ת"ק של X מתקיים כי $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$.
פתרון: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = x^2$ ונגדיר

$$A_1 = \{1\}$$
$$A_2 = \{-1\}$$

ואז

$$f[A_1 \cap A_2] = f[\emptyset] = \emptyset$$

לעומת זאת

$$f[A_1] \cap f[A_2] = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$$

(דוגמה נוספת: $f : \{-1,1\} \to \{1\}$ המוגדרת $f(x) = x^2$ ו A_1, A_2 כמו מקודם).

(ב) האם יש הכלה שכן נכונה? יש! למה? כי $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1, A_2$ ולכן $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1], f[A_2]$ ולכן גם $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$.

(ג) הוכיחו שאם f חח"ע אז מתקיים שיוויון.
הוכחה: תהיינה A_1, A_2 שתי ת"ק של X. צ"ל $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$.
ראינו כבר את ההכלה ($\subseteq$).
נותר להוכיח את ($\supseteq$) יהא $y \in f[A_1] \cap f[A_2]$ אזי $y \in f[A_1]$ וגם $y \in f[A_2]$.
אזי קיים $x_1 \in A_1$ כך ש $f(x_1) = y$ וגם קיים $x_2 \in A_2$ המקיים $f(x_2) = y$.
קיבלנו ש $f(x_1) = y = f(x_2)$ ומכיוון ש f חח"ע נסיק ש $A_1 \ni x_1 = x_2 \in A_2$
ולכן

$$x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$$

ולכן

$$y = f(x_1) \in f[A_1 \cap A_2]$$

וסיימנו.

(ד) הוכיחו: f חח"ע אמ"מ לכל A_1, A_2 ת"ק של X מתקיים כי $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$.

פתרון: סעיף קודם הוכחנו את הכיוון $(\Leftarrow)$.

נותר להוכיח$(\Rightarrow)$. כלומר, נניח שלכל A_1, A_2 ת"ק של X מתקיים כי $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$. צ"ל f חח"ע.

נניח $x_1, x_2 \in X$ המקיימים $f(x_1) = f(x_2)$ צ"ל $x_1 = x_2$. נגדיר

$$A_1 = \{x_1\}$$
$$A_2 = \{x_2\}$$

ולפי ההנחה מתקיים

$$f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2] = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\}$$

נב"ש ש $x_1 \neq x_2$ ונקבל ש $f[A_1 \cap A_2] = f[\emptyset] = \emptyset$ וקיבלנו ש $\emptyset = \{f(x_1)\}$. סתירה.

7. תהא $f : X \to Y$ פונקציה. הוכיחו:

(א) לכל A ת"ק של X מתקיים $A \subseteq f^{-1}\left[f[A]\right]$. בנוסף אם f חח"ע אז מתקיים שיוויון. (בהרצאה)

(ב) לכל B ת"ק של Y מתקיים $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$. בנוסף אם f על אז מתקיים שיוויון. (בהרצאה)

8. תהא $f : X \to Y$ פונקציה. הוכיחו:

(א) אם לכל ת"ק A של X מתקיים $f^{-1}\left[f[A]\right] = A$ אז f חח"ע. (תעשו לבד)

(ב) אם לכל ת"ק B של Y מתקיים $f\left[f^{-1}[B]\right] = B$ אז f על.

הוכחה: נניח לכל ת"ק B של Y מתקיים $f\left[f^{-1}[B]\right] = B$ צ"ל f על.

יהא $y \in Y$ צריך למצוא לו מקור. נב"ש של y אין מקור. נגדיר $B = \{y\}$ ואז לפי ההנחה

$$f\left[f^{-1}[B]\right] = B$$

בצד שמאל של השיוויון יש

$$f\left[f^{-1}[B]\right] = f\left[\emptyset\right] = \emptyset$$

וקיבלנו ש $B = \emptyset$ סתירה.

9. מי מהבאים היא פונקציה הפיכה? עבור הפונקציות ההפיכות - מצאו את ההופכית:

(א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $f(x)=2x+1$.

פתרון: f הפיכה. חישוב עזר, שמוכיח ש f על: יהא y בטווח וצריך למצוא x כך ש

$$f(x)=2x+1=y$$

נבודד את x

$$x=\frac{y-1}{2}$$

ונקבל שאכן

$$f(x)=2\cdot\left(\frac{y-1}{2}\right)+1=y$$

לכן, נגדיר $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $g(y)=\frac{y-1}{2}$ ונקבל ש

$$f\left(g(y)\right)=f\left(\frac{y-1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{y-1}{2}\right)+1=y=I(y)$$

וגם

$$g(f(x))=g(2x+1)=\frac{(2x+1)-1}{2}=x=I(x)$$

וקיבלנו $f\circ g=I$ וגם $g\circ f=I$ ולכן קיבלנו ש g ההופכית של f.

(ב) תהא X קבוצה ונגדיר $f:P(X)\to P(X)$ ע"י $f(A)=A^c$.

פתרון: f הפיכה ומתקיים ש $f^{-1}=f$. למה? צריך להראות ש $f\left(f(A)\right)=A$.

חישוב ישיר

$$f\left(f(A)\right)=f\left(A^c\right)=\left(A^c\right)^c=A$$

(ג) תהא X קבוצה ו B ת"ק של X. נגדיר $f:P(X)\to P(X)$ ע"י $f(A)=A\triangle B$

פתרון: f הפיכה ומתקיים ש $f^{-1}=f$. למה? צריך להראות ש $f\left(f(A)\right)=A$.

חישוב ישיר

$$f\left(f(A)\right)=f\left(A\triangle B\right)=\left(A\triangle B\right)\triangle B=A\triangle\left(B\triangle B\right)=A$$

(ד) תהא X קבוצה ו B ת"ק של X. נגדיר $f:P(X)\to P(X)$ ע"י $f(A)=A\backslash B$

פתרון: לא! למשל עבור $X=\{1,2\}$ ו $B=\{1\}$ ואז

$$f(\emptyset)=\emptyset\backslash B=\emptyset$$

$$f(B)=B\backslash B=\emptyset$$

ולכן f אינה חח"ע (כי $f(\emptyset)=f(B)$). ולכן f אינה הפיכה.

10. משפטים מההרצאה: יהיו $f : A \to B$ ו $g : B \to C$ פונקציות. אזי:

(א) אם f ו g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע

(ב) אם f ו g על אז $g \circ f$ על

(ג) אם $g \circ f$ חח"ע אז f חח"ע (g לא בהכרח!)

(ד) אם $g \circ f$ על אז g על (f לא בהכרח!)

11. יהיו f, g פונקציות כך שההרכבה מוגדרת ומתקיים $I = g \circ f \circ g$. הוכיחו/הפריכו: f הפיכה.

פתרון: נתחיל להוכיח ש g הפיכה. הוכחה: מכיוון ש $g \circ (f \circ g) = I$ ו I על נקבל ש g (השמאלית) על. מכיוון ש $(g \circ f) \circ g = I$ ו I חח"ע נקבל ש g (הימנית) היא חח"ע. לכן g חח"ע + על ולכן g הפיכה. ולכן קיימת g^{-1} ונרכיב אותה על השיוון $g \circ f \circ g = I$ ונקבל

$$f = \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f \circ \left(g \circ g^{-1}\right) = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g) \circ g^{-1} = g^{-1} \circ I \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g^{-1}$$

קיבלנו ש $f = g^{-1} \circ g^{-1}$. כיוון ש g^{-1} הפיכה. נקבל ש f הפיכה כהרכבה של הפיכות.