תרגיל בית 5- מתמטיקה בדידה

שאלה 1. נגדיר $A_n := \{2n, 3n, (-1)^n\}$. כעת נסמן:

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{2n} \quad , A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{3n}$$

חשבו את: $A \cap B$

שאלה 2. היזכרו כי בתרגיל הבית הקודם עבור קבוצות: $A_1, A_2 \cdots A_n$ (בקבוצה אוניברסלית $\mathfrak{U}$). הגדרנו את הקבוצה הבאה:

$$\mathbf{X} := \{X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n : \forall 0 \leq i \leq n \, (X_i = A_i) \wedge (X_i = \mathfrak{U} \setminus A_i)\}$$

חשבו את: $\bigcup \mathbb{X}$

שאלה 3. א. הראו כי הבאים שקולים עבור n, m טבעיים:

(1) $n \subset m$

(2) $n \in m$

(3) $n < m$

ב. הראו כי מתקיים עבור n טבעי כי: $n \subset \mathcal{P}(n)$

שאלה 4. נגדיר לכל n טבעי; $A_n = n$ חשבו את:

(1) $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

(2) $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

שאלה 5. א.תהי $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ מנייה של קבוצות אינסופיות. הוכיחו כי:

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \iff \{n : x \in A_n\} \text{ infinite}$$

ב. חשבו את: $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{t=n} [t, t^2]$

שאלה 6. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

יהי $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ מנייה של קבוצות. כך שעבור $m > n$ טבעיים מתקיים: $A_m \subseteq A_n$. ובנוסף החיתוך בין הקבוצות לא ריק, כלומר; $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. יהי B קבוצה, כך ש $B \subset A_m$ עבור m טבעי כלשהו, ומתקיים: $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subset B$. אזי קיים k טבעי כך ש: $A_k \subset B$.