אנליזה מודרנית
תרגיל 6

תאריך הגשה: 20.12.12

תרגיל 0 (לא להגשה) קראו בוויקיפדיה על פונקציית קנטור, ועל הדרך שבעזרתה בונים קבוצת לבג שאיננה קבוצת בורל (ובעצם מוכיחים ש־$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R})$)

תרגיל 1 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח, $f : X \to [0, \infty]$ מדידה ואי־שלילית, ומקיימת $\int_X f d\mu = c$ כאשר $0 < c < \infty$. יהי $\alpha > 0$ קבוע.

הוכיחו כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right] = \begin{cases} \infty & 0 < \alpha < 1 \\ c & \alpha = 1 \\ 0 & 1 < \alpha < \infty \end{cases}$$

(**רמז:** אם $\alpha \geq 1$, האינטגרנדים נשלטים ע"י αf, ואם $\alpha < 1$ ניתן להפעיל את למת פאטו.

תרגיל 2 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח, ותהי $f : X \to [0, \infty]$ מדידה $d\mu$. עבור $E \in \mathcal{S}$ נגדיר $\nu(E) = \int_E f d\mu$. הוכחנו בהרצאה כי ν היא מידה.

1. הוכיחו כי לכל $g : X \to [0, \infty]$ מדידה $d\mu$ מתקיים

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu$$

(**הדרכה:** הראו זאת בשלבים כמו בתרגיל הקודם ־ התחילו מפונקציית אינדיקטור, וסיימו בפונקציה אי־שלילית כללית)

2. באיזה תנאי הפונקציה $g : X \to \mathbb{R}^*$ אינטגרבילית $d\nu$?

תרגיל 3 יהי $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ממ"ח בו μ היא מידת הספירה. פונקציות $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ הן בעצם סדרות של מספרים ממשיים.

1. תהיינה $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, המוגדרות ע"י $a_n = \frac{(-1)^n}{n}, b_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$. מי מהן מדידה? מי מהן אינטגרבילית? חשבו את האינטגרל של האינטגרבילית מבינהן.
2. תנו אפיון (תנאי הכרחי ומספיק) של הפונקציות המדידות $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
3. כנ"ל עבור הפונקציות האינטגרביליות.
4. מצאו ביטוי לאינטגרל של פונקציה אינטגרבילית $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

בהצלחה!