תרגיל בית 7 אינפי 3

1. מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן (מקסימום/מינימום/אוכף) עבור הפונקציות הבאות (בכל תחום ההגדרה)

א) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$

פתרון.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$$

נחשב גרדיאנט ונקבל

$$\nabla f = (3x^2 + 6x, 3y^2 - 12y)$$

הגרדיאנט מתאפס כאשר

$$3x^2 + 6x \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$$3y^2 - 12y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 4$$

לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(0,0), \quad (0,4), \quad (-2,0), \quad (-2,4)$$

נחשב את מטריצת ההסיאן.

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y-12 \end{pmatrix}$$

נבדוק את המטריצה עבור כל נקודה

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $6, -12$ ולכן המטריצה מעורבת וזו נקודת אוכף.

$$H_{(0,4)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $6, 12$ ולכן זו מטריצה חיובית לחלוטין והנקודה היא נקודת מינימום.

$$H_{(-2,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-6, -12$ ולכן זו מטריצה שלילית לחלוטין וזו נקודת מקסימום.

$$H_{(-2,4)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-6, 12$ ולכן זו מטריצה מעורבת וזו נקודת אוכף.

(ב) $f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$

פתרון.

$$f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$$

הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f = (2(x-1), -4y)$$

הוא שווה לאפס רק בנקודה

$$(1,0)$$

מטריצת ההסיאן היא

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

בפרט

$$H_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $2, -4$ ולכן זו מטריצה מעורבת והנקודה היא נקודת אוכף.

(ג) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

פתרון.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$\nabla f = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x)$$

כלומר נקבל מערכת משוואות:

$$x^3 - x + y = 0$$
$$y^3 - y + x = 0$$

נסכום את שתי המשוואות ונקבל

$$x^3 + y^3 = 0$$

ולכן $x = -y$. נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל

$$x^3 - 2x = 0$$

שזה מתקיים כאשר $x = 0$ או כאשר $x = \pm\sqrt{2}$. לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

עבור

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

שזו מטריצה לא הפיכה ולכן לא ניתן לקבוע מההסיאן אם הנקודה היא מינימום, מקסימום או אוכף.

$$H_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = H_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

בעזרת קריטריון סילבסטר נראה ש $20 > 0$ ו הדטרמיננטה היא $400 - 16 > 0$ ולכן המטריצה היא חיובית לחלוטין ולכן אלה נקודות מינימום.

כדי לבדוק את $(0,0)$ נשתמש בדרכים אחרות.

נשים לב ש

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

אם נתקדם לאורך $x = y$ נקבל ש

$$f(x,x) = x^4 + x^4 \geq 0$$

ולכן $(0,0)$ היא לא נקודת מקסימום.

מצד שני, אם נתקדם לאורך $y=0$ נקבל

$$f(x,0)=x^4-2x^2$$

אם נחקור פונקציה זו נקבל

$$f'=4x^3-4x$$

$$f''=12x^2-4$$

בנקודה $x=0$ נקבל

$$f''(0)=-4<0$$

ולכן $x=0$ היא מקסימום לאורך הישר $y=0$. ולכן היא לא מינימום, לכן קיבלנו ש $(0,0)$ היא נקודת אוכף.

(ד) (רשות-אין צורך להגיש) $(a,b>0)$ $\quad f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

פתרון.

$$f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\quad (a,b>0)$$

נחשב את הגרדיאנט

$$f_x=y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}+xy\frac{-2\frac{x}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{y(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})-\frac{x^2y}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{y-2\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

באופן דומה

$$f_y=\frac{x-\frac{x^3}{a^2}-2\frac{y^2x}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

לכן צריך לבדוק מתי

$$\frac{y-2\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=0,\quad \frac{x-\frac{x^3}{a^2}-2\frac{y^2x}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=0$$

כלומר

$$y-2\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}=0,\quad x-\frac{x^3}{a^2}-2\frac{y^2x}{b^2}=0$$

ראשיתת נניח ש $y\neq 0$, $x\neq 0$ ואז ניתן לחלק ב y במשוואה הראשונה וב x במשוואה השניה. ולקבל

$$1-2\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\quad 1-\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0$$

כלומר

$$2\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1=\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}$$

ולכן

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$$

ולכן

$$x=\pm\frac{ay}{b}$$

נציב זאת במשוואה

$$1-\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0$$

ונקבל

$$1-\frac{y^2}{b^2}-2\frac{y^2}{b^2}=0$$

כלומר

$$y^2=\frac{b^2}{3}$$

ולכן

$$y=\pm\frac{b}{\sqrt{3}}$$

כלומר, אם לא מסתכלים על הצירים (כי הנחנו ש $x,y\neq 0$) הנקודות הקריטיות הן

$$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$$

כעת נבדוק מה קורה על הצירים. ברור ש $(0,0)$ היא נקודה קריטית. אם $x=0$ אבל $y\neq 0$ נקבל

$$y-2\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}=0\Rightarrow y-\frac{y^3}{b^2}=0\Rightarrow 1=\frac{y^2}{b^2}\Rightarrow y=\pm b$$

באופן דומה אם $y=0$ ו $x\neq 0$ נקבל נקודות קריטיות כאשר $x=\pm a$. אבל $(a,0),\quad(-a,0),\quad(0,b),\quad(0,-b)$ נמצאים מחוץ לתחום שאנחנו בודקים ולכן נזרוק אותן. לסיכום: כלל הנקודות הקריטיות הן

$$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad(0,0)$$

ראשית נבדוק את הנקודה $(0,0)$. ברור ש $0<\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ בסביבת הנקודה בכל התחום שלנו. לכן אם נתקדם לאורך $x=y$ נקבל

$$f(x,x)=x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}>0$$

ואם נתקדם לאורך $x=-y$ נקבל

$$f(x,-x)=-x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}<0$$

אבל $f(0,0)=0$ ולכן זו נקודת אוכף.

כדי לסווג את שאר הנקודות, נסתמך על התובנות הבאות:

- אם $f(x_0)>0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם הוא מקסימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0)>0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם הוא מינימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם הוא מינימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0)<0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם הוא מקסימום מקומי של f^2.

לכן נחקור את

$$f^2(x,y)=x^2y^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})=x^2y^2-\frac{x^4y^2}{a^2}-\frac{x^2y^4}{b^2}$$

נגזרות מסדר ראשון

$$f_x=2xy^2-4\frac{x^3y^2}{a^2}-2\frac{xy^4}{b^2},\quad f_y=2x^2y-2\frac{x^4y}{a^2}-4\frac{x^2y^3}{b^2}$$

ולכן הנגזרות מסדר שני הן:

$$f_{xx}=2y^2-12\frac{x^2y^2}{a^2}-2\frac{y^4}{b^2},\quad f_{xy}=4xy-8\frac{x^3y}{a^2}-8\frac{xy^3}{b^2},\quad f_{yy}=2x^2-2\frac{x^4}{a^2}-12\frac{x^2y^2}{b^2}$$

ולכן ההסיאן היא:

$$H_{(x,y)}=\begin{pmatrix} 2y^2-12\frac{x^2y^2}{a^2}-2\frac{y^4}{b^2} & 4xy-8\frac{x^3y}{a^2}-8\frac{xy^3}{b^2} \\ 4xy-8\frac{x^3y}{a^2}-8\frac{xy^3}{b^2} & 2x^2-2\frac{x^4}{a^2}-12\frac{x^2y^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

נבדוק כל נקודה קריטית בנפרד

$$H_{(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})}=\begin{pmatrix} \frac{2b^2}{3}-\frac{4b^2}{3}-\frac{2b^2}{9} & \frac{4ab}{3}-\frac{8ab}{9}-\frac{8ab}{9} \\ \frac{4ab}{3}-\frac{8ab}{9}-\frac{8ab}{9} & \frac{2a^2}{3}-\frac{4a^2}{3}-\frac{2a^2}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{8b^2}{9} & -\frac{4ab}{9} \\ -\frac{4ab}{9} & -\frac{8a^2}{9} \end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא $-\frac{8b^2}{9}<0$ והמינור השני הוא הדטרמיננטה שהיא $\frac{64a^2b^2}{81}-\frac{16a^2b^2}{81}=\frac{48a^2b^2}{81}>0$ לכן זוהי מטריצה שלילית לחלוטין וזו נקודת מקסימום של f^2.

קל לראות שנקבל אותו מינור ראשון ואותה דטרמיננטה עבור כל אחת מהנקודות הקריטיות ולכן הן כולן מקסימום של f^2.

כעת, נשים לב ש $f(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),f(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}) > 0$ ולכן נקודות אלה הן מקסימום גם של f ואילו $f(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),f(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}) < 0$ ולכן נקודות אלה הן מינימום של f.

(ה) $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

פתרון.

$$f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

נמצא נגזרות חלקיות

$$f_x(x,y)=2xe^{-(x^2+y^2)}+(x^2+y^2)(-2x)e^{-(x^2+y^2)}$$

באופן דומה

$$f_y(x,y)=2ye^{-(x^2+y^2)}+(x^2+y^2)(-2y)e^{-(x^2+y^2)}$$

כלומר נקבל משוואות

$$2x-2x(x^2+y^2)=0$$

$$2y-2y(x^2+y^2)=0$$

אם $x\neq 0$ ו $y\neq 0$ נקבל שהמשוואות מתקיימות בכל נקודה שבה $x^2+y^2=1$.

אם $x=0$ נקבל שהמשוואה השניה היא:

$$2y-2y^3=0$$

שפתרונותיה הם $y=0$ או $y=\pm 1$ ובדומה נקבל שאם $y=0$ אז $x=0$ או $x=\pm 1$. ולכן הנקודות הקריטיות הן

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(0,0)\}$$

היות ו $f(x,y)\geq 0$ ו $f(0,0)=0$ ברור ש $(0,0)$ היא נקודת מינימום. כדי לחקור את שאר הנקודות אפשר להציב $t=x^2+y^2$ ולחקור את הפונקציה $g(t)=te^{-t}$ בנקודה $t=1$.

נקבל ש

$$g'=e^{-t}-te^{-t}$$

$$g'' = -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$$

ולכן

$$g''(1) = -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} < 0$$

ולכן זו נקודת מקסימום ולכן גם הנקודות שבהן $x^2 + y^2 = 1$ הן נקודות מקסימום.

ו) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (a > 0)$

פתרון.

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (a > 0)$$

נחשב נגזרות חלקיות ונשווה ל 0

$$f_x = 4x^3 - 4a^2x = 0 \Rightarrow x \in \{0, a, -a\}$$

$$f_y = 4y^3 - 4a^2y = 0 \Rightarrow y \in \{0, a, -a\}$$

$$f_z = 4z^3 - 4a^2z = 0 \Rightarrow z \in \{0, a, -a\}$$

קיבלנו שיש 27 נקודות קריטיות

$$\{0, a, -a\} \times \{0, a, -a\} \times \{0, a, -a\}$$

נמצא את מטריצת ההסיאן

$$H_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12y^2 - 4a^2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה שלילית לחלוטין ולכן $(0,0,0)$ היא נקודת מקסימום.

$$H_{(\pm a,0,0)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מעורבת ולכן $(\pm a, 0, 0)$ היא נקודת אוכף, באופן דומה $(0, \pm a, 0)$ ו $(0, 0, \pm a)$ הן נקודות אוכף.

$$H_{(\pm a, \pm a, 0)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מעורבת ולכן $(\pm a, \pm a, 0)$ היא נקודת אוכף.באופן דומה גם $(\pm a, 0, \pm a)$ ו $(0, \pm a, \pm a)$ הן נקודות אוכף.

כעת,

$$H_{(\pm a, \pm a, \pm a)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה חיובית לחלוטין ולכן אלה נקודות מינימום.

2. תהי

$$f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

(א) הוכיחו כי $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.

פתרון.

$$f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

נחשב נגזרות חלקיות

$$f_x = -6x(y - x^2) + (y - 3x^2)(-2x), \quad f_y = (y - x^2) + (y - 3x^2)$$

קל לראות ש $(0, 0)$ מאפסת את שתי הנגזרות החלקיות ולכן היא נקודה קריטית.

(ב) הוכיחו כי ל f יש מינימום מקומי לאורך כל קו ישר העובר דרך הראשית. כלומר, אם נגדיר $g(t) = (at, bt)$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$ יתקיים כי ל $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ יש מינימום מקומי ב $t = 0$.

פתרון.

$$f \circ g(t) = (bt - 3a^2t^2)(bt - a^2t^2) = b^2t^2 - 3a^2bt^3 - a^2bt^3 + 3a^4t^4 = 3a^4t^4 - 4a^2bt^3 + b^2t^2$$

נחקור פונקציה זו בשיטות רגילות של אינפי 1. נגזרת ראשונה:

$$12a^4t^3 - 12a^2bt^2 + 2b^2t$$

ברור ש $t = 0$ הוא פתרון.

נגזרת שניה:

$$36a^4t^2 - 24a^2bt + 2b^2$$

אם נציב $t = 0$ נקבל $2b^2 > 0$ ולכן זה מינימום.

(ג) הוכיחו כי $(0,0)$ אינה מינימום מקומי של f.

פתרון. נתקדם לאורך $y = 2x^2$ ונקבל

$$f(x, 2x^2) = (2x^2 - 3x^2)(2x^2 - x^2) = -x^4$$

לפונקציה זו יש מקסימום בנקודה $x = 0$ ולכן $(0,0)$ אינה נקודת מינמום אלא נקודת אוכף.

3. הוכיחו כי המשוואות הבאות מגדירות את z כפונקציה של x, y בסביבת הנקודה $a = (a_1, a_2, a_3)$ וחשב את $z_x(a_1, a_2), z_y(a_1, a_2), z_{xy}(a_1, a_2)$.

(א)

$$F(x, y, z) = y^2 + xy + z^2 - e^z - 4 = 0$$

$$a = (0, e, 2)$$

פתרון.

$$F_z = 2z - e^z$$

$$F_z(0, e, 2) = 4 - e^2 \neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y.

$$F_x = y, \quad F_y = 2y + x$$

ולכן בסביבת הנקודה $(0, e)$ מתקיים ש:

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{y}{e^z - 2z}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y + x}{e^z - 2z}$$

ולכן

$$z_x(0, e) = \frac{e}{e^2 - 4}, \quad z_y(0, e) = \frac{2e}{e^2 - 4}$$

כעת

$$z_{xy}(x, y) = (\frac{2y + x}{e^z - 2z})'_y = \frac{2(e^z - 2z) - (e^z - 2z)z_y(2y + x)}{(e^z - 2z)^2}$$

$$z_{xy}(0, e) = \frac{2(e^2 - 4) - (e^2 - 4)\frac{2e}{e^2 - 4}(2e)}{(e^2 - 4)^2} = \frac{2(e^2 - 4) - 4e^2}{(e^2 - 4)^2} = \frac{-2e^2 - 8}{(e^2 - 4)^2}$$

(ב)

$$xz + y\ln z + x^2 = 0$$

$$a = (-2,0,2)$$

פתרון.

$$F_z = x + \frac{y}{z}$$

$$F_z(-2,0,2) = -2 \neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x,y.

$$F_x = z + 2x, \quad F_y = \ln z$$

ולכן בסביבת הנקודה $(-2,0)$ מתקיים ש:

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\ln z}{x+\frac{y}{z}}$$

ולכן

$$z_x(-2,0) = -\frac{2-4}{-2} = -1, \quad z_y(-2,0) = -\frac{\ln 2}{-2} = \frac{\ln 2}{2}$$

כעת

$$z_{xy}(-2,0) = (-\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}})'_y|_{(-2,0)} = -\frac{z_y(x+\frac{y}{z}) - (\frac{z-yz_y}{z^2})(z+2x)}{(x+\frac{y}{z})^2}|_{(-2,0)} =$$
$$-\frac{\frac{\ln 2}{2}(-2) - (\frac{2}{4})(2-4)}{4} = \frac{-\ln 2 + 1}{4}$$

4. נתונה משוואה $\sqrt{x^2+y^5+\cos z - 1} = z^4 + 1$.

(א) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1,0,0)$ את x כפונקציה של y,z?

פתרון. נכתוב

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^5+\cos z - 1} - z^4 - 1$$

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^5+\cos z - 1}}$$

לכן

$$F_x(-1,0,0) = \frac{-1}{\sqrt{1+0+1-1}} = -1 \neq 0$$

ולכן F מגדירה את x כפונקציה של y,z.

(ב) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1,0,0)$ את y כפונקציה של x,z?

פתרון.

$$F_y = \frac{5y^4}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}$$

לכן

$$F_y(-1,0,0)=0$$

ולכן לא ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אבל, קל לראות שניתן לחלץ את y מהמשוואה

$$y =^5 \sqrt{(z^4+1)^2-x^2-\cos z+1}$$

ולכן המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x,z.

(ג) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1,0,0)$ את z כפונקציה של x,y?

פתרון.

$$F_z = \frac{-\sin z}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}} - 4z^3$$

ולכן

$$F_z(-1,0,0)=0$$

לכן לא ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אבל אפשר לשים לב שאם $(-1-\delta,0,t)$ הוא פתרון למשוואה עבור $\delta,\epsilon>0$ אז גם $(-1-\delta,0,-t)$ הוא פתרון למשוואה. כלומר, לכל סביבת ϵשל $(-1,0,0)$ קיים איזשהו $\delta>0$ ושני ערכים z_1,z_2 כך ש $(-1-\delta,0,z_1)$ ו $(-1-\delta,0,z_2)$ נמצאים בסביבה ו

$$F(-1-\delta,0,z_1)=F(-1-\delta,0,z_2)=0$$

ולכן F לא מגדירה את z כפונקציה של x,y.

5. נניח כי המשוואה $F(x,y,z)=0$ מקיימת את תנאי הפונקציה הסתומה לפי כל אחד מן המשתנים בנקודה $a=(a_1,a_2,a_3)$ ולכן מגדירה פונקציות

$$x=x(y,z), \quad y=y(x,z), \quad z=z(x,y)$$

מצאו את (המספר)

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2)$$

פתרון. לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3)=-\frac{F_y(a)}{F_x(a)},\quad \frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3)=-\frac{F_z(a)}{F_y(a)},\quad \frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2)=-\frac{F_x(a)}{F_z(a)}$$

ולכן ברור ש

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2)=-\frac{F_y(a)}{F_x(a)}-\frac{F_z(a)}{F_y(a)}-\frac{F_x(a)}{F_z(a)}=-1$$

6. (א) הוכיחו כי קיים כדור כלשהוא $B\subseteq\mathbb{R}^4$ שמרכזו ב $(2,1,-1,-2)$ וקיימות פונקציות $u,v:B\to\mathbb{R}$ הגזירות ברציפות על B. כך ש

$$u(2,1,-1,-2)=4,\quad v(2,1,-1,-2)=3$$

ולכל נקודה $(x,y,z,w)\in B$ מתקיים

$$u^2+v^2+w^2=29,\quad \frac{u^2}{x^2}+\frac{v^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2}=17$$

פתרון. השאלה היא בעצם האם המשוואות

$$u^2+v^2+w^2=29,\quad \frac{u^2}{x^2}+\frac{v^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2}=17$$

מגדירות את u,v כפונקציות של x,y,z,w בסביבת $(2,1,-1,-2,4,3)$

לפי משפט הפונקציה הסתומה צריך לבדוק את המטריצה

$$\begin{pmatrix} F_{1u} & F_{1v} \\ F_{2u} & F_{2v} \end{pmatrix}$$

$$F_1=u^2+v^2+w^2-29$$

ולכן

$$F_{1u}=2u,\quad F_{1v}=2v$$

ולכן

$$F_{1u}(2,1,-1,-2,4,3)=8,\quad F_{1v}(2,1,-1,-2,4,3)=6$$

באותו אופן

$$F_2=\frac{u^2}{x^2}+\frac{v^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2}-17$$

ולכן

$$F_{2u}=2\frac{u}{x^2},\quad F_{2v}=2\frac{v}{y^2}$$

ולכן

$$F_{2u}(2,1,-1,-2,4,3)=2,\quad F_{2v}(2,1,-1,-2,4,3)=6$$

קיבלנו את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

שהיא הפיכה כי הדטרמיננטה שלה היא $48-12=36$. לכן לפי משפט הפונקציה הסתומה מתקיים כי F מגדירה את u,v כפונקציה של x,y,z,w.

(ב) מצאו את

$$u_x(2,1,-1,-2),\quad v_x(2,1,-1,-2),\quad u_z(2,1,-1,-2),\quad v_z(2,1,-1,-2)$$

פתרון. לפי משפט הפונקציה הסתומה,

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix}$$

לכן נחשב את F_{1x} ואת F_{2x}

$$F_{1x}=0,\quad F_{2x}=-2\frac{u^2}{x^3}$$

לכן

$$F_{1x}(2,1,-1,-2,4,3)=0,\quad F_{2x}(2,1,-1,-2,4,3)=-4$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

באותו אופן:

$$F_{1z}=0,\quad F_{2z}=-2\frac{w^2}{z^3}$$

לכן

$$F_{1z}(2,1,-1,-2,4,3)=0, \quad F_{2z}(2,1,-1,-2,4,3)=8$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_z \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 48 \\ -64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

7. תהי

$$f(x,y,z)=(e^x \sin z, e^y \cos z, e^z xy)$$

הוכח כי f הפיכה מקומית ב $(0,1,0)$ ומצא את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0,e,0)$.

פתרון. נחשב את מטריצת יעקובי של f בעזרת נגזרות חלקיות

$$\begin{pmatrix} e^x \sin z & 0 & e^x \cos z \\ 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ e^z y & e^z x & e^z xy \end{pmatrix}$$

נציב את הנקודה $(0,1,0)$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה הפיכה ולכן f הפיכה מקומית ב $(0,1,0)$. מטריצת יעקובי של ההפוכית שלה היא המטריצה ההופכית

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$