תרגיל בית 10

שאלה 1

פתור את המשוואות המדויקות הבאות:

הערה: בחלק מהסעיפים יש למצוא גורם אינטגרציוני כדי לקבל משוואה מדויקת.

א. $\left(3+y+2y^2\sin^2 x\right)dx+\left(x+2xy-y\sin(2x)\right)dy=0$.

ב. $\left(6x+y^2\right)dx+y(2x-3y)dy=0$.

ג. $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$. פתור בדרך נוספת ובדוק שהתקבלה תשובה זהה.

ד. $\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

פתרון שאלה 1

הערה: כל המשוואות מהצורה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

נשתמש בסימון $M(x,y),N(x,y)$ כדי לקצר את הרישום בפתרון.

סעיף א

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+4y\sin^2 x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=1+2y-2y\cos 2x.$$

נשים לב: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

$1+2y-2y\cos 2x=1+2y-2y\left(1-2\sin^2 x\right)=1+4y\sin^2 x$ והמשוואה מדויקת.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\ .$$

$$u(x,y)=\int\left(3+y+2y^2\sin^2 x\right)dx=\int\left(3+y+y^2-y^2\cos 2x\right)dx=3x+yx+y^2x-\frac{y^2\sin 2x}{2}+c(y)$$

ואז מצד אחד $\frac{\partial u}{\partial y}=x+2yx-y\sin 2x+c'(y)$ ומצד שני $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$.

נקבל את המשוואה $x+2yx-y\sin 2x+c'(y)=x+2xy-y\sin 2x\Rightarrow c'(y)=0\Rightarrow c(y)=c$

פתרון המשוואה $3x+yx+y^2x-\frac{y^2\sin 2x}{2}=c$.

סעיף ב

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2y$ והמשוואה מדויקת.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\ .$$

$u(x,y)=\int\left(6x+y^2\right)dx=3x^2+y^2x+c(y)$ ואז מצד אחד $\frac{\partial u}{\partial y}=2yx+c'(y)$ ומצד שני

$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$.

נקבל את המשוואה $2yx+c'(y)=2yx-3y^2\Rightarrow c'(y)=-3y^2\Rightarrow c(y)=-y^3$

פתרון המשוואה $3x^2+y^2x-y^3=c$.

סעיף ג

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x+2y,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x+y$ והמשוואה לא מדויקת.

יש למצוא פונקציה $\mu(x,y)$ כך שהמשוואה $\mu(x,y)(3xy+y^2)dx+\mu(x,y)(x^2+xy)dy=0$ תהייה מדויקת.

$\mu'_y(3xy+y^2)+\mu(3x+2y)=\mu'_x(x^2+xy)+\mu(2x+y) \Rightarrow \mu'_y(3xy+y^2)+\mu(x+y)=\mu'_x(x^2+xy)$

$\mu'_y(3xy+y^2)+\mu(x+y)=\mu'_x\, x(x+y)$. אם $\mu'_y=0$ נקבל $\mu(x+y)=\mu'_x\, x(x+y)$.

$\mu=x\mu'_x \Rightarrow \mu=x$.

נכפיל בגורם האינטגרציוני ונקבל את המשוואה $(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0$.

נבדוק שאכן המשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2xy, \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+2xy$ והמשוואה מדויקת.

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

ואז מצד אחד $u(x,y)=\int(3x^2y+xy^2)dx=x^3y+\frac{x^2y^2}{2}+c(y)$ ומצד $\frac{\partial u}{\partial y}=x^3+x^2y+c'(y)$

שני $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=x^3+x^2y$.

נקבל את המשוואה $x^3+x^2y+c'(y)=x^3+x^2y \Rightarrow c'(y)=0 \Rightarrow c(y)=c$

פתרון המשוואה $x^3y+\frac{x^2y^2}{2}=c$.

<u>סעיף ג דרך נוספת</u>

$$(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0 \Rightarrow (x^2+xy)dy=(-3xy-y^2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-3xy-y^2}{x^2+xy} \Rightarrow y'=\frac{-3xy-y^2}{x^2+xy}$$

קיבלנו משוואה הומוגנית. נציב $y=ux \Rightarrow y'=u'x+u$.

$$u'x+u=\frac{-3ux^2-u^2x^2}{x^2+ux^2} \Rightarrow u'x=\frac{-3u-u^2}{1+u}-u \Rightarrow u'x=\frac{-4u-2u^2}{1+u} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{1+u}{-4u-2u^2}du$$

$$\frac{4+4u}{4u+2u^2}du=\frac{-4dx}{x} \Rightarrow \ln\left|4u+2u^2\right|=-4\ln x+\ln c \Rightarrow 4u+2u^2=\frac{c}{x^4} \Rightarrow \frac{4y}{x}+\frac{2y^2}{x^2}=\frac{c}{x^4}$$

סה"כ נקבל $4x^3y+2x^2y^2=c$. נציב קבוע $c=4c_1$ ונקבל $x^3y+\frac{x^2y^2}{2}=c_1$ כמו התשובה שהתקבלה כאשר פתרנו בעזרת גורם אינטגרציוני ומשוואה מדוייקת.

<u>סעיף ד</u>

$$(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

נבדוק תחילה שהמשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2x+3y^2, \frac{\partial N}{\partial x}=2x$ והמשוואה לא מדויקת.

יש למצוא פונקציה $\mu(x,y)$ כך שהמשוואה

$\mu(x,y)(3x^2y+2xy+y^3)dx+\mu(x,y)(x^2+y^2)dy=0$ תהייה מדויקת.

$$\mu'_y(3x^2y+2xy+y^3)+\mu(3x^2+2x+3y^2)=\mu'_x(x^2+y^2)+2x\mu$$

$$\mu'_y(3x^2y+2xy+y^3)+\mu(3x^2+3y^2)=\mu'_x(x^2+y^2)$$

$\mu'_y(3x^2y+2xy+y^3)+3\mu(x^2+y^2)=\mu'_x(x^2+y^2)$. אם $\mu'_y=0$ נקבל

$3\mu=\mu'_x \Rightarrow \mu=e^{3x}$.

נכפיל בגורם האינטגרציוני ונקבל את המשוואה $e^{3x}\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+e^{3x}\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

נבדוק שאכן המשוואה מדויקת:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2e^{3x}+2xe^{3x}+3y^2e^{3x}, \frac{\partial N}{\partial x}=3e^{3x}\left(x^2+y^2\right)+2xe^{3x}$ והמשוואה מדויקת.

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

ואז מצד אחד $u(x,y)=\int 3x^2ye^{3x}+2xye^{3x}+y^3e^{3x}dx=x^2ye^{3x}+\frac{y^3e^{3x}}{3}+c(y)$

ומצד שני $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2e^{3x}+y^2e^{3x}+c'(y)$ $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)=e^{3x}\left(x^2+y^2\right)$.

נקבל את המשוואה $x^2e^{3x}+y^2e^{3x}+c'(y)=e^{3x}\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow c'(y)=0 \Rightarrow c(y)=c$

פתרון המשוואה $x^2ye^{3x}+\frac{y^3e^{3x}}{3}=c$.

.