פתרון תרגיל בית 6 - תורת גלואה
סמסטר א', תשע"ז

שאלה 0.1. האם ההרחבות הבאות הן נורמליות? אם לא, הרחיבו אותם לסגור הנורמלי ע"י סיפוח שורשים של היוצרים:

1. $\mathbb{Q}\left[\sqrt[4]{2}\right]/\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]$
3. $\mathbb{Q}[\rho_5]$

פתרון.
1. הפולינום המינימלי של $\sqrt[4]{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^4 - 2$ והוא לא מתפצל מעל $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$ ולכן זו לא הרחבה נורמלית. נספח את כל השורשים ונקבל את הסגור הנורמלי: $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}i] = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}, i]$.
2. בודקים את הפולינום המינימלי של כל היוצרים: הפולינום המינימלי של $\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ מתפצל. הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ הוא $x^3 - 2$ והוא לא מתפצל מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2}]$ ולכן זו לא הרחבה נורמלית. נספח את כל השורשים $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{2}i]$ - זהו הסגור הנורמלי.
3. הפולינום המינימלי של ρ_5 מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ והשורשים הם ρ_5^i שנמצאים כולם בשדה, ולכן זוהי הרחבה נורמלית.

שאלה 0.2. הוכיחו כי כל הרחבה K/F ממימד 2 היא נורמלית.

פתרון. יהי $a \in K$ הפולינום המינימלי של a מעל F הוא מדרגה 2 לכל היותר כי $[F[a] : F] \leq [K : F]$.

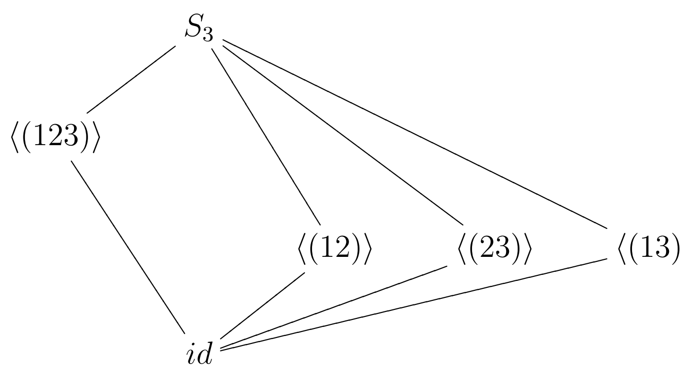
מכיוון ו$a \in K$, מעל K הפולינום בהכרח מתחלק בגורם $(x - a)$ ולכן הוא מתפצל (כי הדרגה היא לכל היותר 2).

שאלה 0.3. חשבו את תת-השדות של ההרחבות הבאות:

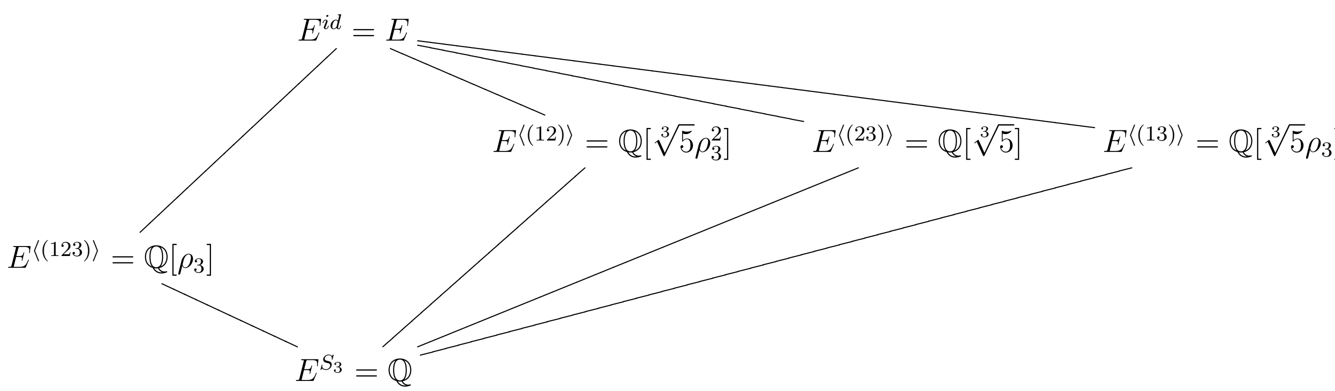
1. שדה הפיצול של x^3-5 מעל $\mathbb{Q}$.
2. שדה הפיצול של x^7-1 מעל $\mathbb{Q}$.
3. שדה הפיצול של x^4+1 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (שימו לב ש $\rho_8=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$).

פתרון. חישבנו את חבורות גלואה בתרגיל בית הקודם.

1. שדה הפיצול הוא $E=\mathbb{Q}\left[\rho_3,\sqrt[3]{5}\right]$ וחבורת גלואה הייתה S_3. שריג תת-החבורות של S_3 הוא



ולכן כאשר מסמנים את השורשים $"1"=\sqrt[3]{5},\ "2"=\sqrt[3]{5}\rho_3,\ "3"=\sqrt[3]{5}\rho_3^2$ שריג התת-שדות הוא



2. שדה הפיצול הוא $E=\mathbb{Q}\left[\rho_7\right]$חבורת גלואה הייתה $\mathbb{Z}_6$ כאשר היוצר הוא $\rho_7\mapsto\rho_7^3$.

שריג התת-חבורות של $\mathbb{Z}_6$ הוא

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{Z}_6 \arrow[dl, dash] \arrow[ddr, dash] & \\
\langle 2 \rangle \arrow[ddr, dash] & & \\
 & & \langle 3 \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ולכן שריג התת-שדות הוא

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & E^0 = E \arrow[ddl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & E^{\langle 3 \rangle} = \mathbb{Q}[\rho_7 + \rho_7^6] \arrow[ddl, dash] \\
E^{\langle 2 \rangle} = \mathbb{Q}[\rho_7 + \rho_7^2 + \rho_7^4] \arrow[dr, dash] & & \\
 & E^{\mathbb{Z}_6} = \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

3. שדה הפיצול הוא $E = \mathbb{Q}\left[\rho_8\right]$ וחבורת גלואה הייתה $\mathbb{Z}_2$ עם האיבר הלא טריוויאלי $\rho_8 \mapsto \rho_8^7$. שריג התת-חבורות הוא

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dash] \\
0
\end{tikzcd}$$

ולכן שריג התת-שדות הוא

$$\begin{tikzcd}
E^0 = E \arrow[d, dash] \\
E^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]
\end{tikzcd}$$

שאלה 0.4. תהי E/F הרחבת גלואה ממימד p^n עבור מספר ראשוני p.
הוכיחו כי יש שדות ביניים ממימד p ו $p-1$.

פתרון. חבורת גלואה G היא מגודל p^n, כלומר שהיא חבורת-p. לפי משפטי סילו יש לG ת"ח H מסדר p ות"ח K מסדר p^{n-1}.

אם כן יש תת-שדות:

E^H ממימד $[E^H : F] = [G : H] = p^n/p = p^{n-1}$.

E^K ממימד $[E^K : F] = [G : K] = p^n/p^{n-1} = p$.

שאלה 0.5. יהי E שדה הפיצול של פולינום אי-פריק $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ מדרגה 4, ויהי $\alpha \in E$ שורש של $f(x)$.

נתון כי $Gal\,(E/\mathbb{Q}) \cong S_4$ הוכיחו כי אין תת שדות לא טריוויאלים בהרחבה $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$.

האם $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ היא הרחבת גלואה?

פתרון. נרשום את הפוליום מעל שדה הפיצול: $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$ כאשר $\alpha = \alpha_1$.

לפי הנתון, חבורת גלואה עושה את כל התמורות האפשריות לשורשים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

הת"ח המתאימה לתת-השדה $\mathbb{Q}[\alpha_1]$ הוא $Gal(E/\mathbb{Q}[\alpha]) \cong S_3$ (התמורות ששומרות על α_1).

אם היה תת-שדה $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{Q}[\alpha]$ לא טריוויאלי, הוא היה מתאים לת"ח לא טריוויאלית $S_3 \leq H \leq S_4$, אבל ידוע שאין כזו.

ולכן אין תת-שדות להרחבה $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$.

בנוסף, S_3 הוא לא ת"ח נורמלית של S_4 ולכן ההרחבה $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ היא לא גלואה.