פתרון תרגיל בית 8 תורת גלואה - תשע"ח

1. חשב את חבורת גלואה של ההרחבות הבאות:

א. $\mathbb{Q}[\rho_9]/\mathbb{Q}$

ב. $\mathbb{Q}[\rho_9]/\mathbb{Q}[\rho_3]$

.

פתרון:

א. כידוע $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}\left[\rho_9\right]/\mathbb{Q}\right) = \left\{\sigma_k \mid \sigma_k(\rho_9) = \rho_9^k,\ (k,9)=1\right\} \cong U_9$.

ב. נבדוק מי מאברי החבורה של הסעיף הקודם שומר על $\rho_3 = \rho_9^3$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\rho_3) &= \rho_3 \\
\sigma_2(\rho_3) &= \rho_3^2 \\
\sigma_4(\rho_3) &= \rho_3^4 = \rho_3 \\
\sigma_5(\rho_3) &= \rho_3^2 \\
\sigma_7(\rho_3) &= \rho_3 \\
\sigma_8(\rho_3) &= \rho_3^2
\end{aligned}$$

ולכן החבורה היא $\{\sigma_1, \sigma_4, \sigma_7\} \cong \mathbb{Z}_3$.

2. חשבו את הפולינומים הציקלוטומיים $\Phi_n(x)$ מעל $\mathbb{Q}$, עבור:

א. $n = 12$.

ב. $n=8$.

ג. $n=2^k$

.

פתרון:

א. נחשב

$$\Phi_{12}=\frac{x^{12}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_6}=\frac{x^{12}-1}{(x^6-1)\Phi_4}=\frac{x^6+1}{\Phi_4}=\frac{x^6+1}{x^2+1}=x^4-x^2+1$$

כאשר $\Phi_4=\frac{x^4-1}{\Phi_1\Phi_2}=\frac{x^4-1}{x^2-1}=x^2+1$.

ב. לפי הסעיף הבא: x^4

ג. נחשב כי

$$\Phi_{2^k}=\frac{x^{2^k}-1}{\Phi_1\Phi_2\dots\Phi_{2^{k-1}}}=\frac{x^{2^k}-1}{x^{2^{k-1}}-1}=x^{2^{k-1}}+1$$

3. תהי $F\subseteq K\subseteq L$ שרשרת שדות כך שכל ההרחבות הן גלואה. הוכיחו כי

$$\mathrm{N}_{L/F}=\mathrm{N}_{K/F}\,\mathrm{N}_{L/K}$$
$$\mathrm{T}_{L/F}=\mathrm{T}_{K/F}\,\mathrm{T}_{L/K}$$

פתרון: נסמן $G=\mathrm{Gal}\,(L/F)$ ו־ $H=\mathrm{Gal}\,(L/K)$. מכיוון שלפי ההנחה גם ${}^{K}\!/_{F}$ גלואה, אז לפי התאמת גלואה $\mathrm{Gal}(K/F)\cong {}^{G}\!/_{H}$.
כעת,

$$\mathrm{N}_{K/F}\,\mathrm{N}_{L/K}(x)=\mathrm{N}_{K/F}\left(\prod_{\sigma\in H}\sigma(x)\right)=\prod_{\sigma\in H}\mathrm{N}_{K/F}(x)=\prod_{\sigma\in H}\sigma\left(\prod_{\tau H\in G/H}\tau(x)\right)=\prod_{g\in G}g(x)=\mathrm{N}_{L/F}(x)$$

ובאופן דומה (סכום במקום מכפלה) עבור העיקבה.

4. תהי $K/_F$ הרחבת גלואה, $\mathrm{Gal}\,(K/F)=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$.
נזכיר כי **בסיס נורמלי** של K הוא בסיס של K כמ"ו מעל F מהצורה $\{\sigma_1(\alpha),\dots,\sigma_n(\alpha)\}$ עבור $\alpha\in K$.

א. הוכיחו כי $K=F[\alpha]$ אם ורק אם $\{\sigma_1(\alpha),\dots,\sigma_n(\alpha)\}$ הם n איברים שונים.

ב. הסיקו כי כל איבר $\alpha\in K$ שמסלולו הוא בסיס נורמלי של K מעל F, הוא איבר פרימיטיבי.
כלומר: אם $\{\sigma_1(\alpha),\dots,\sigma_n(\alpha)\}$ בסיס נורמלי, אז $K=F[\alpha]$.

ג. האם הכיוון ההפוך גם נכון? (האם כל איבר פרימיטיבי נותן בסיס נורמלי?).

.

פתרון:

א. כיוון א: אם $K=F[\alpha]$ אז α הוא מדרגה $[K\colon F]=n$ כלומר שיש לפולינום המינימלי של α מעל F n שורשים שונים. ידוע שהשורשים הם $\{\sigma_1(\alpha),\dots,\sigma_n(\alpha)\}$ (חבורת גלואה פועלת טרנזיטיבית על השורשים) ולכן נסיק שהם שונים זה מזה .

כיוון ב: יודע שהשורשים של הפולינום המינימלי של α הם $\{\sigma_1(\alpha),\dots,\sigma_n(\alpha)\}$. אם נניח שהם n איברים שונים, אז הפולינום הוא מדרגה n ואז $[F[\alpha]\colon F]=n$. מצד שני $F[\alpha]\subseteq K$ גם ממימד n ולכן $K=F[\alpha]$.

ב. אם $\{\sigma_1(\alpha),\dots,\sigma_n(\alpha)\}$ הוא בסיס אז בפרט הם כולם איברים שונים זה מזה, ואז לפי הסעיף הקודם נקבל ש $K=F[\alpha]$.

ג. לא. למשל $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]/_{\mathbb{Q}}$ האיבר $\sqrt{2}$ הוא איבר פרימיטיבי, אבל המסלול שלו הוא $\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\right\}$ שהוא לא בסיס כי אינו בת"ל.

5. יהי F שדה ממאפיין $\neq 2$, ותהי $E/_F$ הרחבת גלואה כך ש $\mathrm{Gal}(E/F)\cong A_4$.
ידוע כי $A_4=\langle\sigma,\tau\rangle$ כאשר $\sigma=(123)$, $\tau=(12)(34)$.
כפי שלמדתם בהרצאה, $\mathrm{T}_{E/E^{\langle\sigma\rangle}}$ היא על. כלומר , $\mathrm{T}_{E/E^{\langle\sigma\rangle}}(E)=E^{\langle\sigma\rangle}$.
הוכיחו כי גם $\mathrm{T}_{E/E^{\langle\sigma\rangle}}\left(E^{\langle\tau\rangle}\right)=E^{\langle\sigma\rangle}$.
<u>רמז</u> (אופציונלי): אפשר להשתמש בבסיס נורמלי.

פתרון: נקח בסיס נורמלי

$$\left\{a,\tau(a),\sigma(a),\sigma^2(a),\tau\sigma(a),\tau\sigma^2(a),\sigma\tau(a),\sigma^2\tau(a),\tau\sigma\tau(a),\tau\sigma^2\tau(a),\sigma\tau\sigma^2(a),\sigma^2\tau\sigma(a)\right\}$$

אזי (לפי טענה מהתירגול) בסיס ל E^τ הוא $a+\tau(a),\ \sigma(a)+\tau\sigma(a),\ \sigma^2(a)+\tau\sigma^2(a),\ \sigma\tau(a)+\tau\sigma\tau(a),\ \sigma^2\tau(a)+\tau\sigma^2\tau(a),\ \sigma\tau\sigma^2(a)+\sigma^2\tau\sigma(a)$.

נפעיל על זה את העקבה לפי σ (ונסדר לפי הסדר):

$$a+\tau(a)+\sigma(a)+\sigma^2(a)+\sigma\tau(a)+\sigma^2\tau(a)$$
$$a+\sigma(a)+\sigma^2(a)+\tau\sigma(a)+\tau\sigma^2\tau(a)+\sigma^2\tau\sigma(a)$$
$$a+\sigma(a)+\sigma^2(a)+\tau\sigma^2(a)+\tau\sigma\tau(a)+\sigma\tau\sigma^2(a)$$
$$\tau(a)+\tau\sigma^2(a)+\sigma\tau(a)+\sigma^2\tau(a)+\tau\sigma\tau(a)+\sigma\tau\sigma^2(a)$$

כבר בשלב זה ניתן לראות שמה שנפרש הוא ממימד 4 מעל $\mathbb{Q}$ (לפחות), ומכיוון ו־ E^σ הוא ממימד 4 מעל $\mathbb{Q}$ זה מוכיח שההעתקה $T_\sigma\colon E^\tau\to E^\sigma$ (שהיא לינארית מעל $\mathbb{Q}$) היא על.

6. תהי K/F הרחבת גלואה ממימד n, ונניח $\rho_m\in F$ כאשר ρ_m שורש יחידה m־פרימיטיבי.

הוכיחו כי **תנאי הכרחי לקיום** של הרחבת גלואה ציקלית L/F כך ש L/K מדרגה m הוא ש ρ_m הוא נורמה ב K/F (כלומר, קיים $x\in K$ כך ש $\mathrm{N}_{K/F}(x)=\rho_m$).

פתרון: נניח שיש הרחבה כזאת L. נסמן $\mathrm{Gal}(L/F)=\langle\sigma\rangle$ אזי לפי התאמת גלואה $Gal(L/K)=\langle\sigma^n\rangle$ ו־ $Gal(K/F)\cong{}^{\langle\sigma\rangle}/_{\langle\sigma^n\rangle}=\left\{\overline{Id},\bar{\sigma},\overline{\sigma^2},\dots,\overline{\sigma^{n-1}}\right\}$. את L/K אפשר לרשום כ $L=K[\alpha]$ כאשר $\sigma^n(\alpha)=\rho_m\alpha$ לפי משפט לגרנג (מסקנה מהילברט 90).

נתבונן ב־ $x=\dfrac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$ ונשים לב ש $\sigma^n(x)=x$ ולכן $x\in K$.

נחשב:

$$N_{K/F}(x)=x\sigma(x)\sigma^2(x)\cdots\sigma^{n-1}(x)=\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\frac{\sigma^2(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\cdots\frac{\sigma^n(\alpha)}{\sigma^{n-1}(\alpha)}=\frac{\sigma^n(\alpha)}{\alpha}=\frac{\rho_m\alpha}{\alpha}=\rho_m$$

.