

מבחן – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 83-216

מועד א, סמסטר א' תש"ע

מרצה- רומי מגורי-כהן.

חומר עזר אסור פרט לדף נוסחאות מצורף ומחשובן.

יש לבחור 5 שאלות מתוך 6

זמן הבחינה: שעתיים.

1) יהיו X, Y שני משתנים מקריים בלתי מתואמים בעל שונות סופיות a^2 ו- b^2 בהתאמה.

$$\rho(X, X + Y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \quad \text{הוכיחו כי}$$

2) שלושה חברים יוצאים לאכול במסעדה. כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן, וזה שקיבל תוצאה שונה משני חבריו נושא בהוצאות הארוחה. אם כולם קיבלו אותה תוצאה, הם עורכים סיבוב נוסף של הטלת מטבע, וממשיכים בכך עד שאחד מקבל תוצאה שונה משל האחרים. מהי ההסתברות ש-
א. הם עורכים בדיוק 3 סיבובים של הטלת מטבע.
ב. דרושים להם יותר מ- 4 סיבובים של הטלת מטבע.
ג. בכל סיבוב בו כולם מקבלים אותה תוצאה, מכניס כל אחד 20 ₪ לקופה המשותפת.
כמה שקלים יהיו במוצע בקופה בתחילת הארוחה?

3) מר כהן מעריך שאורך החיים של מכונית הוא משתנה מקרי מעריכי עם אורך חיים ממוצע של 200 אלף ק"מ. הוא קונה מכונית משומשת שנסעה 50 אלף ק"מ.
א. מהי ההסתברות שהוא יוכל לסוע בה לפחות 100 אלף ק"מ נוספים?
ב. חזרו על החישוב בהנחה שאורך החיים (באלפי ק"מ) אינו בעל התפלגות מעריכית אלא בעל התפלגות אחידה בקטע $[0, 400]$.

4) זמן-החיים (בימים) של רכיב מסוג מסוים הוא מ"מ בעל פונקציה הצפיפות
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
. כאשר מתקלקל הרכיב, מחליפים אותו מיד ברכיב אחר מאותו הסוג.
כמה רכיבים יש להחזיק במלאי, אם רוצים להיות בטוחים ב- 90% שהמלאי יספיק ל- 35 יום לפחות? הנח כי הרכיבים פועלים באופן בלתי תלוי.

5) מטילים מטבע הוגנת עד להופעה הראשונה של "עץ". יהי N מספר ההטלות. לאחר מכן, לוקחים מטבע בעל סיכוי $\frac{1}{N}$ "לעץ". יהי R מספר ההופעות של "עץ" בהטלת המטבע.

א. חשבו את $E(R|N)$

ב. האם N, R בלתי תלויים? נמקי

6) בדרכו לאוניברסיטה עובר יוסי שלושה רמזורים המרוחקים מאוד זה מזה. ההסתברות לאור ירוק ברמזור הראשון היא $\frac{1}{2}$, בשני היא $\frac{1}{3}$, ובשלישי היא $\frac{1}{4}$. ההסתברות לאור ירוק בכל רמזור אינה תלויה ברמזורים האחרים.
יהי X - מספר הרמזורים **הירוקים** אליהם הגיע יוסי ברציפות מתחילת דרכו ועד הרמזור האדום הראשון, (או עד האוניברסיטה אם לא היה אף רמזור אדום כל הדרך).
לדוגמא: במצב (אדום, ירוק, אדום) יש לקבוע $X=0$.
יהי Y - מספר הרמזורים **האדומים** אליהם הגיע יוסי מתחילת דרכו ועד האוניברסיטה. מצאו את פונקציה ההסתברות המשותפת של X ו- Y , ואת פונקציות ההסתברות השוליות שלהם. האם X ו- Y בלתי תלויים?

בהצלחה!