מד"ר - תרגיל 9:

1

(א) $2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0$

ננסה פתרון בצורה: $a_0 \neq 0$ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$ אזי:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2}$$

נציב במד"ר:

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 5 a_n x^{n+\alpha} = 0$$

הדרגה הנמוכה ביותר שמשותפת לכל הטורים היא $\alpha+1$ ולכן נרשום:

$$2\cdot\alpha\cdot(\alpha-1) a_0 x^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha} - \alpha a_0 x^\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+1} - 5 a_0 x^\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} 5 a_n x^{n+\alpha} = 0$$

$$\left[2\alpha^2 - 2\alpha - \alpha - 5\right] a_0 \cdot x^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[2(n+\alpha+1)(n+\alpha) - (n+\alpha+1) - 5\right] a_{n+1} + a_n \right\} x^{n+\alpha+1} = 0$$

מקדם של x^α:

$$(2\alpha^2 - 3\alpha - 5) a_0 = 0 \quad / : a_0 \neq 0$$

$2\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0$ (משוואה אינדיציאלית)

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \frac{10}{4}, \frac{-4}{4} = \frac{5}{2}, -1$$

שאר המקדמים:

$$\left[2(n+\alpha+1)(n+\alpha) - (n+\alpha+1) - 5\right] a_{n+1} + a_n = 0$$

(זוהי נוסחת הרקורסיה)

ניתן לרשום אותה גם כך:

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{(n+\alpha+2)(2n+2\alpha-3)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

עבור $\alpha=\frac{5}{2}$ הרקורסיה היא:

$$a_{n+1}=\frac{-a_n}{(n+\frac{9}{2})(2n+2)}$$

נציב כמה n-ים:

$$n=0:\quad a_1=\frac{-a_0}{9}$$

$$n=1:\quad a_2=\frac{-a_1}{\frac{11}{2}\cdot 4}=-\frac{a_1}{22}=-\frac{\frac{-a_0}{9}}{22}=\frac{a_0}{198}$$

נקבל פתרון ראשון:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha_1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{5}{2}}=a_0x^{\frac{5}{2}}+a_1x^{1+\frac{5}{2}}+a_2x^{2+\frac{5}{2}}+\dots=$$

$$=a_0x^{\frac{5}{2}}\left[1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2+\dots\right]$$

כדי לקבל פתרון פרטי אפשר לקחת $a_0=1$. $y_1(x)=x^{\frac{5}{2}}\left[1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2+\dots\right]$

עבור $\alpha=-1$ הרקורסיה היא:

$$a_{n+1}=\frac{-a_n}{(n+1)(2n-5)}$$

נציב כמה n-ים:

$$n=0:\quad a_1=\frac{-a_0}{-5}=\frac{a_0}{5}$$

$$n=1:\quad a_2=\frac{-a_1}{-6}=\frac{a_1}{6}=\frac{a_0}{30}$$

נקבל פתרון שני:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-1}=a_0\cdot x^{-1}+\frac{a_0}{5}\cdot x^0+\frac{a_0}{30}x^1+\dots=$$

$$=a_0x^{-1}\left[1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\dots\right]$$

גם כאן נוכל לקחת $a_0=1$ ולקבל פתרון פרטי:

$$y_2(x)=x^{-1}\left[1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}x^2+\dots\right]$$

הפתרון הכללי יהיה צירוף לינארי של y_1,y_2:

$$y(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$$

כאשר C_1,C_2 קבועים כלשהם.

קס''3

ק $\quad y''+cy'+\frac{3}{16x^2}y=0 \quad / \cdot 16x^2$

$$16x^2y''+16cx^2y'+3y=0$$

נחפש פתרון בצורה: $a_0\neq 0$, $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}$ ואז:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}\quad,\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-2}$$

נציב במד"ר:

$$\sum_{n=0}^{\infty}16(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}16c(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha+1}+\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+\alpha}=0$$

החזקה הנמוכה ביותר שמשותפת לכל הטורים היא $\alpha+1$, ולכן נרשום:

$$16(\alpha-1)\alpha a_0x^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}16(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}16c(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha+1}$$
$$+3a_0x^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}3a_nx^{n+\alpha}=0$$

$$\left[16\alpha^2-16\alpha+3\right]a_0x^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}16(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}16c(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha+1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}3a_nx^{n+\alpha}=0$$

עבור הטורים שמתחילים כאשר $n=1$ נעשה הזזה ונקבל

$$\left[16\alpha^2-16\alpha+3\right]a_0x^{\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}16(n+\alpha)(n+\alpha+1)a_{n+1}x^{n+\alpha+1}+\sum_{n=0}^{\infty}16c(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha+1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}3a_{n+1}x^{n+\alpha+1}=0$$

$$(16\alpha^2-16\alpha+3)a_0x^{\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[16(n+\alpha)(n+\alpha+1)+3\right]a_{n+1}x^{n+\alpha+1}+16c(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha+1}=0$$

$$(16\alpha^2-16\alpha+3)a_0x^{\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[16(n+\alpha)(n+\alpha+1)+3\right]a_{n+1}+16c(n+\alpha)a_n\right\}x^{n+\alpha+1}=0$$

מקדם של x^{α}:

$$(16\alpha^2-16\alpha+3)a_0=0\quad /:a_0\neq 0$$

$$16\alpha^2-16\alpha+3=0\implies\alpha_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 3\cdot 16}}{32}=\frac{3}{4},\frac{1}{4}$$

שאר המקדמים:

$$\left[16(n+\alpha)(n+\alpha+1)+3\right]a_{n+1}+16c(n+\alpha)a_n=0$$

$$a_{n+1}=\frac{-16c(n+\alpha)a_n}{(4n+4\alpha+1)(4n+4\alpha+3)}\qquad n=0,1,2,\dots$$

עבור $\alpha=\frac{3}{4}$ הרקורסיה היא

$$a_{n+1} = \frac{-16c(n+\frac{3}{4})a_n}{(4n+4)(4n+6)}$$

נציב ערכי n-ים:

$$\underline{n=0}: \quad a_1 = -\frac{c}{2}a_0$$

$$\underline{n=1}: \quad a_2 = \frac{7c^2}{40}a_0$$

נקבל פתרון ראשון:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{3}{4}} = a_0 x^{\frac{3}{4}} + a_1 x^{1+\frac{3}{4}} + a_2 x^{2+\frac{3}{4}} + \dots =$$

$$= a_0 x^{\frac{3}{4}} - \frac{c}{2}a_0 x^{1+\frac{3}{4}} + \frac{7c^2}{40}a_0 x^{2+\frac{3}{4}} + \dots =$$

$$= a_0 x^{\frac{3}{4}}\left[1 - \frac{c}{2}x + \frac{7c^2}{40}x^2 + \dots\right]$$

כדי לקבל פתרון פרטי אפשר לקחת $a_0=1$.

$$y_1(x) = x^{\frac{3}{4}}\left[1 - \frac{c}{2}x + \frac{7c^2}{40}x^2 + \dots\right]$$

כדי להדגיש שאין קשר בין הרקורסיות אקרא למקדמים ברקורסיה השנייה b_n במקום a_n. $(\alpha=\frac{1}{4})$

$$b_{n+1} = \frac{-16c(n+\frac{1}{4})b_n}{(4n+2)(4n+4)}$$

נציב ערכי n-ים:

$$\underline{n=0}: \quad b_1 = -\frac{c}{2}b_0$$

$$\underline{n=1}: \quad b_2 = \frac{5c^2}{24}b_0$$

נקבל פתרון שני:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{4}} = b_0 x^{\frac{1}{4}} + b_1 x^{1+\frac{1}{4}} + b_2 x^{2+\frac{1}{4}} + \dots =$$

$$= b_0 x^{\frac{1}{4}} - \frac{c}{2}b_0 x^{1+\frac{1}{4}} + \frac{5c^2}{24}b_0 x^{2+\frac{1}{4}} + \dots = b_0 x^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{c}{2}x + \frac{5c^2}{24}x^2 + \dots\right)$$

גם כאן ניקח $b_0=1$ ונקבל פתרון פרטי:

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{c}{2}x + \frac{5c^2}{24}x^2 + \dots\right]$$

הפתרון הכללי הוא צירוף ליניארי של y_1, y_2:

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

כאשר c_1, c_2 קבועים חופשיים.

דניס

3

(11) $x^2y''-xy'+(1-x)y=0$

נחפש פתרון בצורה: $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$, $a_0\neq 0$ ונקבל:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1}, \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-2}$$

נציב במד"ר:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha+1}=0$$

החזקה המשותפת המינימלית היא $\alpha+1$, ולכן נרשום:

$$(\alpha-1)\alpha a_0 x^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha}-\alpha a_0 x^{\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha}+a_0x^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+\alpha}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha+1}=0$$

$$(\alpha^2-\alpha-\alpha+1)a_0x^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+\alpha}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\alpha+1}=0$$

$$(\alpha^2-2\alpha+1)a_0x^{\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{[(n+\alpha)(n+\alpha+1)-(n+\alpha+1)+1]a_{n+1}-a_n\right\}x^{n+\alpha+1}=0$$

מקדם של x^{α}:

$(\alpha^2-2\alpha+1)a_0=0 \;/ : a_0\neq 0$

$\alpha^2-2\alpha+1=0$

$(\alpha-1)^2=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=1,1$ שורש כפול.

שוויון המקדמים:

$$[(n+\alpha)(n+\alpha+1)-(n+\alpha+1)+1]a_{n+1}-a_n=0$$

$(n+\alpha)^2 a_{n+1}=a_n$

$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+\alpha)^2}$

עבור $\alpha=1$.

$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)^2}$

$a_1=\frac{a_0}{1^2}=a_0$

$a_2=\frac{a_1}{2^2}=\frac{a_0}{1^2 2^2}$

$\vdots$

$a_n=\frac{a_0}{n!^2}$

ניקח $a_0=1$ ונקבל פתרון פרטי:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!^2}x^{n+1}$$

השורשים של המשוואה האינדיציאלית נבדלים ולכן הפתרון השני מקבל צורה:

$$y_2=y_1\cdot\log(x)+x^1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cdot x^n$$

הפתרון הכללי יהיה צ"ל של $y_{1,2}$:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

(ב) $xy''+(x-6)y'-3y=0$

נחפש פתרון בצורה: $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}\ ;\ a_0\neq 0$ נציב למשוא' ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_nx^{n+\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha}-\sum_{n=0}^{\infty}6(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+\alpha}=0$$

החזקה המינימלית שמופיעה בכל הטורים היא α ולכן נרשום:

$$\alpha(\alpha-1)a_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_nx^{n+\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha}-6\alpha a_0x^{\alpha-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}6(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+\alpha}=0$$

$$(\alpha^2-\alpha-6\alpha)a_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_nx^{n+\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}6(n+\alpha)a_nx^{n+\alpha-1}-\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^{n+\alpha}=0$$

$$(\alpha^2-7\alpha)a_0x^{\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+\alpha+1)(n+\alpha)-6(n+\alpha+1)\right]a_{n+1}+\left[n+\alpha-3\right]a_n\right\}x^{n+\alpha}=0$$

מקדם של $x^{\alpha-1}$:

$$(\alpha^2-7\alpha)a_0=0\ /:a_0\neq 0$$

$$\alpha^2-7\alpha=0\Rightarrow\alpha_{1,2}=0,7\quad(\alpha_1-\alpha_2\in\mathbb{Z})$$

עבור $\alpha = 7$ נקבל את הרקורסיה:

$$(n+1)(n+8)\,a_{n+1} + (n+4)\,a_n = 0$$

$$a_{n+1} = -\frac{(n+4)\,a_n}{(n+1)(n+8)}$$

$\underline{n=0:}$ $\quad a_1 = -\frac{a_0}{2}$

$\underline{n=1:}$ $\quad a_2 = \frac{5}{36} a_0$

$\vdots$

ניקח $a_0 = 1$ ונקבל פתרון פרטי:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+7} \Big|_{a_0=1} = x^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{36}x^2 + \dots\right)$$

$\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ לכן הפתרון השני מהצורה: $\alpha_2 = 0$

$$y_2(x) = x^0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + C \cdot \log(x)\, y_1(x)$$

(ייתכן $C = 0$)

הפתרון הכללי יהיה הצירוף הלינארי $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

(א)(הרמיט) אין נקודות סינגולריות ב-$\mathbb{R}$. נבדוק ב-$x = \infty$: 5

$$z = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{d}{dz} = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dz} = -z^2 \frac{d}{dz}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = -z^2 \frac{d}{dz}\left(-z^2 \frac{d}{dz}\right) = -z^2 \cdot \left(-2z\frac{d}{dz} - z^2 \frac{d^2}{dz^2}\right) = z^4 \frac{d^2}{dz^2} + 2z^3 \frac{d}{dz}$$

משוואת הרמיט תהיה:

$$z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz} - 2 \cdot \frac{1}{z}\left(-z^2 \frac{dy}{dz}\right) + \lambda y = 0$$

$$z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + (2z^3 + 2z)\frac{dy}{dz} + \lambda y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{2z^3 + 2z}{z^4}\frac{dy}{dz} + \frac{\lambda}{z^4} y = 0$$

רואים מכאן ש-∞ נקודה סינגולרית

ס״ז

וכן $\lim_{z\to 0} z^2 \frac{\lambda}{z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{\lambda}{z^2} = \text{undefined}$

לכן $\boxed{x=\infty \text{ היא נקודה לא-רגולרית סינגולרית}}$

(ב)

המשוואה בצורה נורמלית:

$$y'' + \frac{\gamma - x(1+\alpha+\beta)}{x(1-x)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0$$

ב-$\mathbb{R}$ יש שתי נקודות סינגולריות: $x_{1,2} = 0, 1$

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\gamma - x(1+\alpha+\beta)}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\gamma - x(1+\alpha+\beta)}{1-x} = \gamma$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \left(-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $x=0$ נקודה רגולרית-סינגולרית

$$\lim_{x\to 1} (x-1) \cdot \frac{\gamma - x(1+\alpha+\beta)}{x(1-x)} = \lim_{x\to 1} -\frac{\gamma - x(1+\alpha+\beta)}{x} = -\gamma + 1 + \alpha + \beta$$

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \cdot \left(-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}\right) = 0$$

$\Leftarrow$ $\boxed{x=1 \text{ נקודה רגולרית-סינגולרית}}$

נבדוק עבור $x=\infty$: לאחר הצבה $z=\frac{1}{x}$ מקבלים:

$$z^4 \frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz} - z^2 \frac{\gamma - \frac{1}{z}(1+\alpha+\beta)}{\frac{1}{z}(1-\frac{1}{z})} \cdot \frac{dy}{dz} - \frac{\alpha\beta}{\frac{1}{z}\cdot(1-\frac{1}{z})} y = 0 \;/ : z^4$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{\alpha+\beta-1 - z(\gamma-2)}{z(1-z)} \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta}{z^2(1-z)} y = 0$$

הגבולות

$$\lim_{z\to 0} z \cdot \left(-\frac{\alpha+\beta-1-z(\gamma-2)}{z(1-z)}\right)$$

$$\lim_{z\to 0} z^2 \cdot \frac{\alpha\beta}{z^2(1-z)}$$

קיימים ולכן גם $x=\infty$ היא נקודה רגולרית-סינגולרית