אנליזה מודרנית 1 – תשע"ה
פתרונות מועד א'

שימו לב, לכל שאלה יש דרכים שונות לפתרון, והפתרונות המוצעים להלן הן רק אפשרות אחת.

1. יהי X מרחב מדיד, ותהי $f_n : X \to \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות מדידות.

הראה שגם הפונקציה $\limsup_{n\to\infty} f_n$ היא מדידה.

כזכור $\limsup_{n\to\infty} f_n$ פרושו $\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} f_k\right)$.

שלב א': נראה שלכל n הפונקציה $g_n = \sup_{k\ge n} f_k$ היא מדידה. מספיק להראות שלכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים ש $g_n^{-1}\left((y,\infty)\right)$ קבוצה מדידה. אולם $\sup_{k\ge n} f_k(x) > y$ אם"ם קיים $k\ge n$ כך ש $f_k(x) > y$ לכן $g_n^{-1}\left((y,\infty)\right) = \bigcup_{k\ge n} f_k^{-1}\left((y,\infty)\right)$ ולכן מדידה, כאיחוד בן מניה של קבוצות מדידות.

שלב ב': הסדרה g_n היא סדרה יורדת של פונקציות, לכן $\lim_{n\to\infty} g_n = \inf_n g_n$, לכן נותר להראות ש $\inf_n g_n$ פונקציה מדידה. ההוכחה לכך דומה לשלב א'.

---

2. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה לבג, עם $m(A)=1$ (m מידת לבג).

הראה שקיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $m\left(A\cap(-\infty,x]\right) = \frac{1}{2}$.

נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא $f(x) = m\left(A\cap(-\infty,x]\right)$. צריך אם כן להוכיח שיש $x\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=\frac{1}{2}$. נראה זאת בעזרת משפט ערך הביניים ע"י שנראה ש: א. f רציפה. ב. קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)<\frac{1}{2}$ ג. קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)>\frac{1}{2}$.

א. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ ונניח $x\le y$. מתקיים

$$\left|f(y)-f(x)\right| = f(y)-f(x) = m\left(A\cap(x,y]\right) \le m\left((x,y]\right) = y-x = \left|y-x\right|$$

לכן f רציפה.

ב. נגדיר סדרת קבוצות $B_n = A\cap(-\infty,-n]$.

זוהי סדרה יורדת של קבוצות מדידות ממידה **סופית**

לכן $\lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(\bigcap_n B_n) = m(\varnothing) = 0$

לכן יש k כך ש $m(B_k) < \frac{1}{2}$ כלומר $f(-k) < \frac{1}{2}$.

ג. נגדיר סדרת קבוצות $C_n = A \cap (-\infty, n]$.
זוהי סדרה עולה של קבוצות מדידות
לכן $\lim_{n\to\infty} m(C_n) = m(\bigcup_n C_n) = m(A) = 1$

לכן יש m כך ש $m(C_m) > \frac{1}{2}$ כלומר $f(m) > \frac{1}{2}$.

---

3. יהי X מרחב מידה סופי, כלומר $\mu(X) < \infty$, ותהי $f : X \to \mathbb{R}$ אי-שלילית ואינטגרבילית.
הראה ש $\lim_{\alpha \uparrow 1} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$

(כאשר $\lim_{\alpha \uparrow 1}$ פרושו הגבול כאשר α עולה ל 1, כלומר הגבול ב 1 משמאל)

$\lim_{\alpha \uparrow 1} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$ שקול לכך שלכל סדרה **עולה** α_n שמתכנסת ל 1 מתקיים

$\lim_{n\to\infty} \int_X f^{\alpha_n} d\mu = \int_X f d\mu$. נסמן $A = \{x \in X \quad : \quad f(x) \le 1\}$, זוהי קבוצה מדידה.

כיון שלכל g ולכל $B \subseteq X$ מדידה מתקיים $\int_X g d\mu = \int_B g d\mu + \int_{B^c} g d\mu$

מספיק להראות א. $\lim_{n\to\infty} \int_A f^{\alpha_n} d\mu = \int_A f d\mu$ ו ב. $\lim_{n\to\infty} \int_{A^c} f^{\alpha_n} d\mu = \int_{A^c} f d\mu$.

א. על A הסדרה f^{α_n} נשלטת ע"י הפונקציה הקבועה 1 שהיא אינטגרבילית על A כי $\mu(A) \le \mu(X) < \infty$. מתקיים $f^{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ ולכן ממשפט **ההתכנסות הנשלטת**
$\lim_{n\to\infty} \int_A f^{\alpha_n} d\mu = \int_A f d\mu$.

ב. דומה ל א', רק שבקבוצה A^c הסדרה f^{α_n} עולה, ונשתמש כאן במשפט **ההתכנסות המונוטונית**.

---

4. יהי H מרחב הילברט, ויהי $V \subseteq H$ תת מרחב סגור.
יהי $y \in V$, $z \in V^\perp$, ויהי $x = y + z$.
הראה ש y הוא הוקטור הקרוב ביותר ל x ב V.

יהי $y \ne w \in V$ כלשהו, צ"ל $\|x-w\| > \|x-y\|$.

$$\|x-w\|^2 = \|(x-y)+(y-w)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-w\|^2 > \|x-y\|^2$$

השוויון השני נכון כיון ש $y - w \in V$ ו $x - y = z \in V^\perp$.

(שימו לב שלא השתמשנו בסגירות V ובשלמות H. כלומר הטענה נכונה עבור תת מרחב כלשהו במרחב מכפלה פנימית כלשהו.)

---

5. תהי $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ 1 & 1\le x\le 2 \\ x-1 & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

הראה ש f רציפה בהחלט.

אנו יודעים ש $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט אם"ם יש $g:[0,3]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית כך ש $f(x)=f(0)+\int_{[0,x]} gdm$ לכל $x\in[0,3]$ (m מידת לבג). ואם יש g כנ"ל אז היא כ.ב.מ הנגזרת של f.

הנגזרת של f כ.ב.מ היא:

$$g(x)=\begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \\ 1 & 2<x<3 \end{cases}$$

וצריך לבדוק שאכן $f(x)=\int_{[0,x]} gdm$ לכל $x\in[0,3]$:

עבור $0\le x\le 1$ $\int_{[0,x]} gdm=\int_0^x 2t\,dt=x^2$

עבור $1\le x\le 2$ $\int_{[0,x]} gdm=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^x 0\,dt=1+0=1$

עבור $2\le x\le 3$ $\int_{[0,x]} gdm=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^2 0\,dt+\int_2^x 1\,dt=1+0+(x-2)=x-1$