תכנות דינמי

מכפלת מטריצות

מטריצה A - גודל $p\times q$. מטריצה B - גודל $q\times r$. מס' הפעולות להכפלה: $O\left(pqr\right)$

3 מטריצות

$$\underset{p_0\times p_1}{M_1}\cdot\underset{p_1\times p_2}{M_2}\cdot\underset{p_2\times p_3}{M_3}$$

כמה פעולות דרושות?

$$p_0p_1p_2+p_1p_2p_3$$

מכפלת מטריצות היא אסוציאטיבית, אז אפשר לשנות את הסדר:

דוגמה

$$\underset{100\times3}{M_1}\cdot\underset{3\times100}{M_2}\cdot\underset{100\times2}{M_3}$$

אם נעשה $\left(M_1M_2\right)M_3$ מספר הפעולות יהיה

$$100\cdot3\cdot100+100\cdot100\cdot2=50000$$

אבל אם נעשה $M_1\left(M_2M_3\right)$ מספר הפעולות יהיה

$$3\cdot100\cdot2+100\cdot3\cdot2=1200$$

בעיית מכפלת שרשרת מטריצות

קלט $\underset{p_0\times p_1}{M_1},\underset{p_1\times p_2}{M_2},...\underset{p_{n-1}\times p_n}{M_n}$

פלט (מס' הפעולות הדרושות ב)סידור הסוגריים האופטימלי להפכלת מטריצות $M_1\cdot...\cdot M_n$(אופטימלי = מינימום פעולות)

פתרון 1

נעבור על כל סידור סוגריים חוקי ונבדוק את מס' הפעולות הדרושות עם הסידור.
נניח שיש לנו 4 מטריצות. האפשרויות להכפלה הן:

$$\left(\left(M_1M_2\right)\left(M_3M_4\right)\right),\left(\left(\left(M_1,M_2\right)M_3\right)M_4\right),\left(\left(M_1\left(M_2M_3\right)\right)M_4\right)$$

$(M_1((M_2M_3)M_4)),(M_1(M_2(M_3M_4)))$

נניח שנרצה להכפיל את הסידור הראשון. נבנה עץ:

$$\underbrace{\left(\underbrace{(M_1M_2)}_{p_0p_1p_2}\underbrace{(M_3M_4)}_{p_2p_3p_4}\right)}_{p_0p_2p_4}$$

וכן הלאה - לכל סידור יש עץ.

כמה סידורים יש?

<u>הערה:</u> לכל עץ בינרי שלם עם n עלים יש סידור סוגריים(עבור $M_i,...M_n$) חוקי.

לכן, מס' סידורי הסוגריים = מס' העצים השלמים עם n עלים = מס' קטלן הnי $\approx 4^n$
מדובר על סדר גודל אקפוננציאל - נרצה פתרון יותר יעיל.

פתרון 2

נסתכל על הבעיה הפוך - מההכפלה האחרונה להכפלות הקטנות. הפעולה האחרונה שאנו עושים היא הכפלה של שתי מטריצות - $((M_1...M_k)(M_{k+1}...M_n))$.

הפעולה האחרונה שאנו מבצעים היא הכפלה שעלותה $p_0p_kp_n$. איזה k עלינו לבחור?

<u>סימון:</u> $m(1,n)$ - מס' הפעולות הדרושות להכפלת $M_1,...M_n$ בסידור הסוגריים האופטימלי.

<u>נסמן:</u> $M_1M_2...(M_i...M_j)M_{j+1}...M_n$
$m(i,j)$=מספר הפעולות הדרושות להכפלת $M_i...M_j$ בסידור סוגריים אופטימ-לי.

$$m(i,j)=\begin{cases}0 & i=j\\ \min_{i\le k\le j-1}\{m(i,k)+m(k+1,j)+p_{i-1}p_kp_j\} & j>i\end{cases}$$

נגדיר את הפונקציה $m(i,j)$ כדי לחשב את הנוסחה:

```
Mul(i,j)
    if i=j return 0
    else
        x← ∞
        for k=i to j-1
            y←Mul(i,k)+Mul(k+1,j)+p_{i-1}p_kp_j
            if y<x
              x←y
        return(x)
```

התשובה לבעיה - $Mul(1,n)$.

זמן ריצה

$T(n)$ = זמן הריצה של Mul עבור קלט. $n = j - i + 1$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left[T(k) + T(n-k) + 1\right] & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(T(k) + T(n-1) + 1\right) = \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + \sum_{k=1}^{n-1} T(n-k) + (n-1)$$

$$T(n) = 2\sum_{k=1}^{n-1} T(n) + (n-1)$$

$$T(n-1) = 2\sum_{k=1}^{n-2} T(k) + (n-2)$$

$$T(n) - T(n-1) = 2T(n-1) + 1 \Rightarrow T(n) = 3T(n-1) + 1$$

$$T(n) \geq 3T(n-1) \geq 3^2 T(n-2) > \ldots > 3^i T(n-i)$$

$$T(n) > 3^i$$

עדין קיבלנו זמן ריצה אקספוננציאלי!

אז מה הבעיה?

הבעיה היא שאנחנו עדיין מחשבים את הפונקציה Mul עבור אותם ערכים יותר מפעם אחת, כשבסופו של דבר מספר האיברים שרוצים לחשב הוא $O\left(n^2\right)$

מטרה

לחשב את $m(1,n)$ ונעזר בחישובי $m(i,j)$ לכל $1 \leq i \leq j \leq n$.

פתרון - תכנות דינאמי

נשתמש במטריצה $n \times n$. האלכסון הוא אפס, והמשולש התחתון (שבו $j < i$) לא מעניין אותנו. הפתרון יהיה בפינה $1n$.

בתכנות דינאמי, נרצה שכאשר נבוא לחשב ערך, כל הערכים שהוא תלוי בהם כבר יהיו מחושבים. כל איבר אצלנו תלוי באיברים שנמצאים משמאלו ומתחתיו, לכן נרצה לחשב אותם קודם.

```
Mul
```

```
for i=1 to n m(i,i)←0
for diff=1 to n-1
    for i=1 to n-diff
        j←i+diff
        x← ∞
        for k=i to j-1
          y←m(i,k)+m(k+1,j)+p_{i-1}p_kp_j
          if y<x
            x←y
            s(i,j)←k
        m(i,j)←x
```

זמן ריצה

זמן הריצה הוא $O\left(n^3\right)$, שכן יש 3 לולאות שכל אחת רצה עד n פעמים, ו$\Omega\left(n^2\right)$, שכן חייבים לרוץ על כל המשולש העליון של המטריצה.

עבור איבר בתחום החישוב זמן החישוב הוא לפחות $\frac{2}{3}n$. כל האלכסונים אורכם לפחות $\frac{1}{3}n$. מספר האלכסונים בתחום החישוב=$\frac{1}{3}n$. לכן סה"כ יש לנו $\frac{2}{27}n^3 \in \theta\left(n^3\right)$.

מציאת סידור הסוגריים

מכיוון שכל תא במטריצה מייצג חלוקה של סוגריים, ניתן להשתמש במיקום שבוחרים כדי למצוא את הסידור עצמו.

דוגמה

$$M_1 : 3 \times 100$$

$$M_2 : 100 \times 2$$

$$M_3 : 2 \times 100$$

M	1	2	3
1	0	600	1200
2	/	0	20000
3	/	/	0