<u>אלגברה מופשטת - תרגיל 4</u>

תאריך הגשה: 04.09.2011

ההגשה היא בתאי המתרגלים: התא של לואי מס' 58, התא של דורון מס' 82.

אין דחייה בהגשה!

- על התרגיל יש לרשום: שם, תעודת זהות, שם המתרגל.
- יש להגיש את התרגיל **ללא** ניילוניות ו/או קלסרים! אלא בקובץ דפים מהודק מצד ימין!

<u>שאלה 1</u>

א) כמה חבורות אבליות מסדר 500 (עד כדי איזומורפיזם) יש?
ב) בכמה מהן יש איבר מסדר 4?
ג) בכמה מהן יש איבר מסדר 20?
ד) מצא מספר חבורות אבליות (עד כדי אוזימורפיזם) מסדר 3600. בכמה מהן יש תת-חבורה 5-סילו ציקלית?

<u>שאלה 2</u>

א) נניח ש- G היא חבורת p , וש- G פועלת על קבוצה עם n איברים כש- p לא מחלק את n. הוכיחו שקיימת נקודת שבת.
ב) הוכיחו או הפריכו: בהינתן חבורה G הפועלת על קבוצה X כך ש- $|G|=|X|=13$, בהכרח קיימת לפעולה נקודת שבת.
ג) מצא כמה לוחות 3×3 לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע ב-2 צבעים.

<u>שאלה 3</u>

א) כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6?
ב) הוכיחו או הפריכו: קיימת תת-חבורה מסדר 34 בחבורה S_{15}.
ג) תהא $G=S_4$ הפועלת על הקבוצה $X=\{1,2,3,4\}$ ע"י $g*x=g(x)$. חשבו את המייצב של $x=2$. האם המייצב של $x=2$ הוא ת"ח נורמלית של G? נמקו.

<u>שאלה 4</u>

א) תהא G חבורה עם: 20, 45,52, 99 או 175 איברים. הוכיחו ש G לא פשוטה.
ב) הוכיחו או הפריכו: קיימת חבורה לא פתירה עם 77 איברים.
ג) תהא G חבורה מסדר 143. זהו את כל תתי-החבורות שלה (עד כדי איזומורפיזם).
ד) הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר 125.
ה) תהא G חבורה מסדר 1645 או 9797. הוכיחו ש G ציקלית.
ו) הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.

<u>שאלה 5</u>

תהא G חבורה. הוכיחו שלא קיימת תת חבורה p-סילו H כך ש- $\left[G:N\left(H\right)\right]=2$.

<u>שאלה 6</u>

א) מהי הדרגה ($rank$) של $GL_2\left(\mathbb{Z}_2\right)$?
ב) הוכיחו כי כל חבורה אבלית G עם $rank(G)=n$ היא תמונה אפימורפית של $\mathbb{Z}^m$ לכל $m\geq n$.

<u>שאלה 7</u>

מעל קבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ נגדיר פעולה $(a_1,b_1)\bullet(a_2,b_2)=(a_1+b_1a_2,b_1b_2)$. הוכיחו:

א) $G=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\bullet)$ חבורה והיא לא אבלית.

ב) חשבו את G',G'' והראו ש- G פתירה.

<u>שאלה 8</u>

תהא G חבורה מסדר 21 כך שיש בה יותר משני איברים מסדר 3. הראו כי G אינה אבלית אבל פתירה.

<u>שאלה 9</u>

הוכיחו או הפריכו: קיימת חבורה אינסופית G כך שלכל תת-קבוצה סופית $A=\{a_1,...,a_n\}\subset G$, תת-החבורה $<A>$ הנוצרת ע"י A היא סופית.

<u>שאלה 10</u>

א) תנו דוגמא לחבורה סופית לא-אבלית פתירה.

ב) תנו דוגמא לחבורה אינסופית לא-אבלית פתירה.

<u>שאלה 11</u>

הגדרה: תהי G חבורה. האקספוננט של G מסומן $\exp(G)$ ומוגדר להיות המס' הטבעי המינימאלי $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $g^n=e_G$ לכל $g\in G$.

א) תהי G חבורה לא אבלית מסדר p^k (p ראשוני). הוכיחו כי $\exp(G)<|G|$.

ב) מצאו את $\exp(S_3),\exp(S_5)$.

<u>שאלת בונוס 1: 10 נקודות</u>

תהא G חבורה כך ש- $Z(G)=\{e_G\}$. הוכיחו כי $Z\left(Aut\left(G\right)\right)=\left\{e_{Aut(G)}\right\}$.

<u>שאלת בונוס 2: 10 נקודות</u>

תהי G חבורה ו- $A\lhd G$. נתון ש- G/A ציקלית. הוכיחו ש- $[G,A]=[G,G]$.

<u>שאלת בונוס 3: 5 נקודות</u>

א) תהי G חבורה ותהי H ת"ח p-סילו של G. הוכיחו ש- $N(N(H))=N(H)$

ב) הראו כי אם H היא ת"ח של G שאיננה ת"ח p-סילו אז הטענה מסעיף א' לא בהכרח נכונה.

בהצלחה!