

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 10

1. חשבו את מספר הגורמים האי-פריקים של $x^{256} - x$ מעל \mathbb{F}_4 .
2. א. תהי E/F הרחבת גלואה עם $[E:F] > 1$. האם בהכרח קיימת הרחבת ביניים C/F עם דרגת הרחבה ראשונית? (רמז: השתמשו בת"ח של החבורה הסימטרית).
 ב. מה אם נתון ש $Gal(E/F)$ היא חבורה פתירה?
3. תהי K/F הרחבת שדות (לאו דוקא סופית). הראו שהתנאים הבאים שקולים:
 א. כל שיקון של K בתוך סגור אלגברי \bar{K}/K הוא אוטומורפיזם של K .
 ב. K הוא שדה פיצול של משפחה (לאו דוקא סופית) של פולינומים.
 ג. כל פולינום אי-פריק ב $F[x]$ שיש לו שורש מעל K מתפצל מעל K .
 הרחבה המקיימת את אחד התנאים השקולים נקראת הרחבה נורמלית.
4. הוכיחו או הפריכו: אם K שדה פיצול של פולינום ספרבילי אי פריק ממעלה n מעל F אז ב- $Gal(K/F)$ יש איבר מסדר n .
5. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום אי-פריק, ו E/F שדה הפיצול שלו, ונניח ש $Gal(E/F) = S_p$ עבור p ראשוני. תהי $H \triangleleft S_p$, $\{id\} \neq H$, אזי הפולינום $f(x)$ אי-פריק מעל E^H .
6. מצאו את כל הפולינומים הציקלוטומיים (פולינומים מינימליים של שרשי יחידה) כך שהפולינום הוא מדרגה 4. מצאו את שדה הפיצול המשותף של כל הפולינומים.