

תרגיל 10 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. תהי E/F הרחבת שדות וניקח $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$. הוכיחו כי אם σ מקבעת את השדות L ואת K היא מקבעת גם את $K \cdot L$ (השדה הכי קטן שמכיל את שניהם).

2. מצאו את חבורת גלואה של הפולינום $x^5 - 6x + 3$ (כלומר, מצאו את חבורת גלואה $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E שדה הפיצול של הנ"ל).
הדרכה: השתמשו בכלים מאינפי כדי למצוא כמה שורשים ממשיים יש לפולינום ואז השתמשו בתרגיל בהתרגול הקודם.

3. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול E . נניח שחבורת גלואה $\text{Gal}(E/F)$ היא אבלית. יהי a שורש של $f(x)$ הוכיחו:

(א) $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה.

(ב) $E = \mathbb{Q}(a)$.

4. מצאו את כל שדות הביניים של ההרחבה E/\mathbb{Q} כאשר E שדה הפיצול של $(x^2 - 3)$.
(2) ציירו את הסריג של שדות ביניים. קבעו אילו מהם מהווים הרחבה נורמלית מעל \mathbb{Q} .