אלגברה לינארית 1 תיכוניסטים קיץ תשעב/פתרון הבוחן

פתרון הבוחן:

שאלה 1:

נתון כי $A=\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix}$. ו $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\d&2&0\\e&f&3\end{bmatrix}$.

צריך למצוא מטריצות אלמנטריות $E_1,E_2,\dots,E_k$. כך ש $E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_kA=B$.

מדרגים את מטריצה A למטריצה B.

$$\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix}\overset{R_2=R_2-cR_3}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\overset{R_1=R_1-bR_3}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\overset{R_1=R_1-aR_2}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\overset{R_3=3R_3}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\overset{R_3=R_3+eR_1}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\e&0&3\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3=R_3+fR_2}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\e&f&3\end{bmatrix}\overset{R_2=2R_2}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\e&f&3\end{bmatrix}\overset{R_2=R_2+dR_1}{\rightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0\\d&2&0\\e&f&3\end{bmatrix}$$

לכן מטריצות אלמנטריות מתאימות הן

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\d&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&f&1\end{bmatrix}E_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\e&0&1\end{bmatrix}E_5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}E_6=\begin{bmatrix}1&-a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}E_7=\begin{bmatrix}1&0&-b\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}E_8=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-c\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ומתקיים $E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_8A=B$.

(זאת לא התשובה היחידה הנכונה, אבל זאת אחת הפשוטות)

שאלה 2:

נתונה מערכת המיוצגת על ידי המטריצה $\begin{bmatrix}1&a_1&a_2&0&a_3&|&0\\a_4&0&a_5&2&a_6&|&0\\a_7&0&a_8&0&a_9&|&0\end{bmatrix}$

סעיף א) אם המטריצה מדורגת זה אומר ש $a_4=a_7=0$ כי שניהם נמצאים מתחת לאיבר מוביל של השורה הראשונה.

בנוסף אפשר לראות ש $a_8=0$. הוכחה: נניח בשלילה ש $a_8\neq 0$.

אם $a_5\neq 0$ הוא נמצא מתחת לאיבר מוביל של השורה השניה.

אם $a_5=0$ הוא יהיה איבר מוביל משמאל לאיבר המוביל של השורה השניה.

לכן $a_8=0$.

לגבי שאר הפרמטרים, כל בחירה שהיא שלהם תשאיר את המטריצה מדורגת ולכן לא ניתן לדעת מהם.

סעיף ב) אם A מדורגת קנונית אז 2 לא יכול להיות איבר מוביל של השורה השניה.

לכן, $a_5\neq 0$ כלומר הוא איבר מוביל ולכן $a_5=1$.

בנוסף $a_2=0$ כי הוא מעל האיבר המוביל של השורה השניה.

את הפרמטר a_1 אי אפשר לקבוע. גם את הפרמטרים a_3,a_6,a_9 לא ניתן עדיין לקבוע בוודאות. כי יכול להיות ש $a_9=0$ ואז a_3,a_6 יכולים להיות כל מספר שהוא.

ויכול להיות ש $a_9=1$ (ואז $a_3=a_6=0$).

סעיף ג) אם נתון שיש שני משתנים חופשיים, אז יש שלושה איברים מובילים ולכן

$a_9=1$ ולכן $a_3=a_6=0$ כי הם מעל איבר מוביל של השורה השלישית.

את a_1 עדיין לא ניתן לקבוע.

לכן קיבלנו

$$\begin{bmatrix}1&a_1&0&0&0&|&0\\0&0&1&2&0&|&0\\0&0&0&0&1&|&0\end{bmatrix}$$

סעיף ד) פתרון פשוט של המערכת מוביל ל

$x_5=0$. $x_4=t$. $x_3=-2t$. $x_2=s$. $x_1=-a_1s$

כלומר

$(-a_1s,s,-2t,t,0)$.

שאלה 3:

א) $V=\mathbb{R}_3[x]$ ו $U=\{p\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(0)=p(1)\}$

נוכיח ש U תת מרחב לפי הקריטריון המקוצר.

ראשית $U\neq\emptyset$ כי פולינום האפס נמצא בו.

שנית, אם $p_1,p_2\in U$ אז

$$(p_1+p_2)(0)=p_1(0)+p_2(0)=p_1(1)+p_2(1)=(p_1+p_2)(1)$$

ואם $p\in U$ ו $\alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$(\alpha p)(0)=\alpha p(0)=\alpha p(1)=(\alpha p)(1).$$

לכן U תת מרחב של V.

מציאת בסיס ומימד:

איבר כללי של V הוא מהצורה $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

הדרישה $p(0)=p(1)$ אומרת ש

$$a_0+a_1+a_2+a_3=a_0$$

כלומר

$$a_1+a_2+a_3=0$$

זאת מערכת של 4 נעלמים עם משוואה אחת. נמצא את מרחב הפתרונות.

לפי פתרון המטריצה

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & | & 0\end{bmatrix}$$

נקבל ש

$$a_3=t$$

$$a_2=s$$

$$a_1=-s-t$$

$$a_0=r$$

לכן איבר כללי בפתרון הוא

$$(r,-t-s,s,t)=r(1,0,0,0)+s(0,-1,1,0)+t(0,-1,0,1)$$

לכן בסיס יהיה הפולינומים שמיוצגים על ידי

$$(1,0,0,0),(0,-1,1,0),(0,-1,0,1)$$

כלומר

$$\{1,-x+x^2,-x+x^3\}$$

והמימד הוא 3.

ב) 1) הפרכה. לוקחים ב $\mathbb{R}^2$ את

$$A=\{(1,0)\}$$

$$B=\{(2,0)\}$$

ואז

$$span(A\cap B)=span(\emptyset)=\{0\}$$

אבל $span(A)=span(B)$

ולכן $span(A)\cap span(B)=span(A)=span(\{(1,0)\})\neq\{0\}$

2) הוכחה:

נראה הכלה דו כיוונית

היות ולכל קבוצה B

מתקיים ש $B\subseteq span(B)$

זה נכון גם כש $B=span(A)$

ולכן

$span(A)\subseteq span(span(A))$.

מצד שני אנחנו יודעים שאם V הוא מרחב וקטורי שמכיל את A אז $span(A)\subseteq V$.

היות ו $span(A)$ הוא מרחב וקטורי שמכיל את $span(A)$ אז מתקיים $span(span(A))\subseteq span(A)$.

לכם בסך הכל

$span(span(A))=span(A)$.