תרגיל 8 - פתרון.

שאלה 1.

(1) תהי c נקודה ב- (a,b) שבה f רציפה ו- $f(c)\neq 0$.

f אי שלילית בקטע $[a,b]$, ולכן נסיק כי: $0<f(c)$.

f רציפה ב-c ולכן עבור $\varepsilon=\frac{f(c)}{2}$ קיים $0<\delta_1$ כך שכל $x\in[a,b]$

המקיים: $|x-c|<\delta_1$ מקיים $|f(x)-f(c)|<\frac{f(c)}{2} \Leftarrow f(x)>\frac{f(c)}{2}$.

נבחר: $0<\delta<\min\{\delta_1, c-a, b-c\}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{אדטיביות}}{=} \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx+\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx \geq$$

$$\underset{\text{מונוטוניות}}{\geq} \int_a^{c-\delta} 0\,dx+\int_{c-\delta}^{c+\delta}\frac{f(c)}{2}\,dx+\int_{c+\delta}^b 0\,dx=\frac{f(c)}{2}\cdot 2\delta$$

$$=f(c)\cdot\delta>0$$

(2) לא ניתן לוותר על דרישת הרציפות ב-c.

לדוגמא: $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ בקטע $[0,2]$

f היא אי שלילית בקטע $[0,2]$ וכן $f(1)=1>0$,

אולם $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 0\,dx=0$

$f(x)=0$ כמעט לכל x ב- $[0,2]$.

(3) לכל $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ מתקיים: $\sin x+\cos x>0$.

כמו כן, $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=\sin 0+\cos 0=1>0$,

לכן בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$: $\sin x+\cos x>0$, ולכן הפונקציה:

$f(x)=\frac{1}{\sin x+\cos x}$ רציפה בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ - כמנה של פונקציות רציפות

שכן מכנה כאן אינו מתאפס. ולכן: f אינטגרבילית בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$.

f רציפה בקטע הסגור $[0,\frac{\pi}{2}]$ ולכן, לפי משפט ויירשטראס,

מקבלת שם מקסימום ומינימום. בנוסף, f גזירה בקטע, ו-

$$f'(x) = \frac{-\cos x+\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

ומ- $[0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים $f'(x)=0$ רק עבור $x=\frac{\pi}{4}$.

לפיכך, המינימום והמקסימום מתקבלים או ב- $\frac{\pi}{4}$ או בקצות הקטע.

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=1$.

לכן, לכל $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq f(x)\leq 1$,

ועל סמך המונוטוניות נקבל:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(4) טענת עזר: תהיינה h, g פונ' אינטגרביליות בקטע $[a,b]$

המקיימות $g(x)\geq h(x)$ לכל x בקטע.

אם קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש- h ו- g רציפות

ב- c, ו- $g(c)\neq h(c)$ אזי $\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b h(x)\,dx$.

הוכחת טענת העזר: נגדיר, $f(x):=g(x)-h(x)$ בקטע $[a,b]$.

f מקיימת את כל הדרישות של סעיף (4) בשאלה 2 (ובכלל!)

ולכן מתקיים: $\int_a^b f(x)\,dx>0$, כלומר: $\int_a^b (g(x)-h(x))\,dx>0$

ומתכונות הלינאריות של האינטגרל נקבל:

$$\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b h(x)\,dx$$ - כנדרש.

כעת, לפי סעיף (3), לכל $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ מתקיים:

$$f(x) := \frac{1}{\sin x + \cos x} \leq 1,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

וכן f רציפה בקטע. לכן - לפי טענת העזר - מתקיים:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx < \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

כנדרש.