פתרון תרגיל בית 3 בחשבון אינפיניטסימלי 2
89־133 סמסטר ב' תשע"ה

1.א.

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+2x+5)'dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+5)'dx}{x^2+2x+5} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(\frac{x+1}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$$

1.ב.

$$\int \frac{dx}{x^2+8x} = \int \frac{dx}{x(x+8)} = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x+8}\right) dx$$

אם $\frac{1}{x^2+8x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+8}$ אז $1 = a(x+8) + bx$. נציב $x = 0$ ונקבל $a = \frac{1}{8}$. נציב $x = -8$ ונקבל $b = -\frac{1}{8}$. לכן

$$\int \frac{dx}{x^2+8x} = \int \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8}\right) dx = \frac{1}{8}\left(\ln|x| - \ln|x+8|\right) + c.$$

1.ג.

$$\int \frac{2x+3}{x^3-2x^2-3x}dx = \int \frac{2x+3}{x(x+1)(x-3)}dx = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}\right) dx$$

אם $\frac{2x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$ אז $2x+3 = a(x+1)(x-3) + bx(x-3) + cx(x+1)$.
נציב $x = 0$ ונקבל $a = -1$. נציב $x = -1$ ונקבל $b = \frac{1}{4}$. נציב $x = 3$ ונקבל $c = \frac{3}{4}$. לכן

$$\int \frac{2x+3}{x^3-2x^2-3x}dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x-3)}\right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-3| + c$$

1.ד.

$$\int \frac{x^5dx}{x^3+8} = \int \frac{x^5+8x^2}{x^3+8}dx - \int \frac{8x^2}{x^3+8}dx = \int \frac{x^2(x^3+8)}{x^3+8}dx - \frac{8}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+8}dx$$

$$= \int x^2dx - \frac{8}{3}\int \frac{(x^3+8)'}{x^3+8}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}\ln|x^3+8| + c.$$

1.ה.

$$\int \frac{x^4+4}{x^2(x^2+4)}dx = \int \frac{x^4+4x^2}{x^2(x^2+4)}dx - 4\int \frac{x^2-1}{x^2(x^2+4)}dx = \int dx - 4\int \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^2+4}\right)dx$$

אם $\frac{x^2-1}{x^2(x^2+4)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^2+4}$ אז $x^2-1 = ax(x^2+4)+b(x^2+4)+cx^2$ או $ax^3+(b+c-1)x^2+4ax+4b+1=0$, מהשוואת המקדמים של החזקות המתאימות של x נקבל ש־ $a=0$, $b=-\frac{1}{4}$, $c=\frac{5}{4}$. לכן

$$\int \frac{x^4+4}{x^2(x^2+4)}dx = \int dx - \int\left(\frac{5}{x^2+4}-\frac{1}{x^2}\right)dx = x - \int\left(\frac{5}{4}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= x - \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{x} + c.$$

1.ו. קודם נדאג שמעלת המונה תהיה קטנה ממעלת המכנה

$$\int \frac{x^4}{x^3+1}dx = \int \frac{x^4+x-x}{x^3+1}dx = \int \frac{x^4+x}{x^3+1}dx - \int \frac{x}{x^3+1}dx = \int x dx - \int \frac{x}{x^3+1}dx$$

אם $\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$, אז $x = a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$. נציב $x=-1$ ונקבל $3a=-1$. נציב $x=0$ ונקבל $a+c=0$. מהשוואת המקדמים של x^2 בשני האגפים נקבל ש־$a+b=0$. לכן $a=-\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}, c=\frac{1}{3}$. מכאן נקבל

$$\int \frac{x^4}{x^3+1}dx = \int x dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\int \frac{(x^2-x+1)'dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

1.ז. נחפש פירוק מהצורה $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$, כלומר $x = a(x+2)^2+b(x+2)(x+1)+c(x+1)$. נציב $x=-1$ ונקבל $a=-1$. נציב $x=-2$ ונקבל $c=2$. מהשוואת המקדמים של x^2 נקבל $a+b=0$, לכן $b=1$. לכן

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2} = -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= -\ln|x+1| + \ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + c.$$

.2א.

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \left[x = 2\arctan(t), dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c$$

$$= -\ln\left|1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \ln\left|1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c.$$

.2ב.

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \left[x = 2\arctan(t), dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\right] = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c.$$

.2ג.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = [x = \sin(t), dx = \cos(t)dt] = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt}{\sin(t)}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)dt}{\sin(t)} = \left[t = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(t) \geq 0\right] = \int \frac{\cos^2(t)dt}{\sin(t)}$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2(t))dt}{\sin(t)} = \int \frac{dt}{\sin(t)} - \int \sin(t)dt \underset{*}{=} \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| + \cos(t) + c =$$

$$\ln\left|\tan\left(\frac{\arcsin(x)}{2}\right)\right| + \cos(\arcsin(x)) + c,$$

במעבר (*) השתמשנו בסעיף 2.ב. ע"י שימוש בזהויות טריגונומטריות אפשר להראות גם ש־

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}, \tan\left(\frac{\arcsin(x)}{2}\right) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

.2ד.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx = \left[x = \frac{1}{\cos(t)}, dx = \frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}\right] = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)} - 1}\cos^2(t)\frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}$$

$$\int \sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}}\sin(t)dt = \int \sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}\sin(t)$$

$$\left[t=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\in[0,\pi]\Rightarrow \sin(t)\geq 0\right]\underset{*}{=}\int\frac{\sin^2(t)dt}{\cos(t)}=\int\frac{(1-\cos^2(t))dt}{\cos(t)}$$

$$=\int\frac{dt}{\cos(t)}-\int\cos(t)dt\underset{**}{=}-\ln\left|1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|+\ln\left|1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right|-\sin(t)+c$$

$$=-\ln\left|1-\tan\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{2}\right)\right|+\ln\left|1+\tan\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{2}\right)\right|-\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$$

ב ־ (*) הנחנו ש־ $\cos(t)\geq 0$, אם היינו מניחים ש־$\cos(t)\leq 0$ היינו מגיעים לאותה תוצאה (אבל זה תרגיל לא פשוט להראות זאת). ב־ (**) התשמשנו בסעיף א.2. בעזרת זהויות טריגונומטריות אפשר להוכיח ש־

$$-\ln\left|1-\tan\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{2}\right)\right|+\ln\left|1+\tan\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{2}\right)\right|=\ln\left|\frac{1+x+\sqrt{x^2-1}}{1+x-\sqrt{x^2-1}}\right|$$

ו־ $\sin\left(\arccos(\left(\frac{1}{x}\right))\right)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

ה.2.

$$\int\frac{dx}{7\cos(x)-4\sin(x)+8}=\left[x=2\arctan(t),dx=\frac{2dt}{1+t^2},\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}\right]$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{7(1-t^2)}{1+t^2}-\frac{8t}{1+t^2}+8}=\int\frac{2dt}{7(1-t^2)-8t+8(1+t^2)}=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}$$

אם $\frac{2}{(t-3)(t-5)}=\frac{a}{t-3}+\frac{b}{t-5}$ אז $2=a(t-5)+b(t-3)$. נציב $t=3$ ונקבל $a=-2$. נציב $t=5$ ונקבל $b=1$. לכן

$$\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}=\int\left(-\frac{1}{t-3}+\frac{1}{t-5}\right)dt=-\ln|t-3|+\ln|t-5|+c$$

$$=-\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-3\right|+\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-5\right|+c.$$

ו.2.

$$\int\sin(x)\cos(2x)\cos(3x)dx=\left[\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)\right.$$

$$\left.\Rightarrow\sin(x)\cos(2x)=\frac{1}{2}\left(\sin(3x)+\sin(-x)\right)=\frac{1}{2}\left(\sin(3x)-\sin(x)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sin(3x)-\sin(x)\right)\cos(3x)dx=\frac{1}{2}\int\sin(3x)\cos(3x)dx-\frac{1}{2}\int\sin(x)\cos(3x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin(6x)dx - \frac{1}{4}\int (\sin(4x) - \sin(2x))\, dx = -\frac{\cos(6x)}{24} + \frac{\cos(4x)}{16} - \frac{\cos(2x)}{8} + c.$$

2.ז.

$$\int \tan^3(x)dx = \int \tan^2(x)\tan(x)dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)\tan(x)dx$$

$$= \int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}dx - \int \tan(x)dx$$

- לחישוב האינטגרל הראשון נשתמש בהצבה $t = \tan(x), dt = \frac{dx}{\cos^2(x)}$

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\tan^2(x)}{2} + c.$$

- לחישוב האינטגרל השני נשתמש בפונקציית הלוגריתם

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + c.$$

לכן קיבלנו ש־

$$\int \tan^3(x)dx = \frac{\tan^2(x)}{2} + \ln|\cos(x)| + c.$$

2.ח.

$$\int \frac{\sin(2x)dx}{2+\sin(2x)} = [y = 2x, dy = 2dx] = \frac{1}{2}\int \frac{\sin(y)dy}{2+\sin(y)}$$

$$= \left[y = 2\arctan(t), dy = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos(y) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(y) = \frac{2t}{1+t^2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{tdt}{(1+t^2)(1+t+t^2)}$$

נשתמש בפירוק לשברים חלקיים, $\frac{t}{(1+t^2)(1+t+t^2)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{1+t+t^2}$. נכפיל את שני האגפים ב־$(1+t^2)(1+t+t^2)$ ונקבל

$$t = (at+b)(1+t+t^2) + (ct+d)(1+t^2) = (a+c)t^3 + (a+b+d)t^2 + (a+b+c)t + b + d.$$

מהשוואת המקדמים של החזקות המתאימות של t בשני האגפים נקבל

$$a+c = 0, a+b+d = 0, a+b+c = 1, b+d = 0 \Rightarrow b = 1, d = -1.$$

לכן קיבלנו ש־

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(1+t+t^2)} = \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t+t^2} \right) dt$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \arctan(t) - \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

$$= \arctan(t) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c = [t = \tan(x)]$$

$$= x - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan(x)+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$