אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 7

15 בינואר 2020

1. מצאו פתרון כללי של המד"ר הבאות:

(א) $y' + y\tan x = 0$. (הדרכה לאינטגרל: מה זה $\int \frac{f'}{f}$?)

(ב) $y' + y\sin x = 0$.

(ג) $y' + y = xe^x$.

<u>**פתרון:**</u>

א. זו מד"ר ליניארית הומוגנית עם $a(x) = \tan x$. נמצא תחילה את $A(x) = \int a(x)dx = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$.
ניזכר בגזירה הבאה:

$$(\ln(f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'}{f}$$

ולכן $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$. אצלנו נוסיף פעמיים מינוס כדי לקבל את הצורה הזו:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int -\frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|$$

כעת נציב בנוסחא: $y = ce^{-A(x)} = ce^{\ln|\cos x|} = c \cdot |\cos x|$.

ב. זו מד"ר ליניארית הומוגנית עם $a(x) = \sin x$. הפתרון הוא: $y = ce^{-\int \sin x dx} = ce^{\cos x}$.

ג. זו מד"ר ליניארית לא הומוגנית עם $a(x) = 1, b(x) = xe^x$. הפתרון הוא:

$$y = e^{-A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}dx + c\right) = e^{-x}\left(\int xe^x e^x dx + c\right) = e^{-x}\left(\int xe^{2x}dx + c\right)$$

נפתור את האינטגרל בחלקים:

$$\int xe^{2x}dx = \{f = x, f' = 1, g' = e^{2x} g = \frac{1}{2}e^{2x}\} = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = e^{2x} \cdot \frac{2x-1}{4}$$

לכן התשובה היא:

$$y = e^{-x}(e^{2x} \cdot \frac{2x-1}{4} + c) = e^x \cdot \frac{2x-1}{4} + ce^{-x}$$

2. מצאו פתרון פרטי של המד"ר הבאות, עם תנאי ההתחלה המתאימים:

(א) $\begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(1) = 1 \end{cases}$. (הדרכה לאינטגרל: שיטת ההצבה)

(ב) $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

ג) $\begin{cases} y' - \frac{y}{x^2} = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$.

פתרון:

א. זו מד"ר ליניארית מסדר ראשון לא הומוגנית. $a(x) = 2x, A(x) = \int a(x) = x^2, b(x) = 2x$, לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = e^{-A(x)} \left(\int b(x) e^{A(x)} dx + c \right) = e^{-x^2} \left(\int 2xe^{x^2} dx + c \right) = \{t = x^2, dt = 2xdx\} = e^{-x^2} \left(\int e^t dt + c \right) = e^{-x^2}(e^t + c)$$

עכשיו נחזיר את ההצבה אחורה ונקבל

$$y = e^{-x^2}(e^{x^2} + c) = 1 + ce^{-x^2}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$1 = 1 + ce^{-1}$$

$$ce^{-1} = 0$$

$$c = 0$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = 1$$

ב. באותו אופן: $a(x) = \frac{1}{x}, A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x, b(x) = e^x$. לכן: $y = e^{-\ln x}(\int e^x e^{\ln x} dx + c) = \frac{1}{x}(\int xe^x dx + c)$. נפתור את האינטגרל בחלקים:

$$\int xe^x dx = \{f = x, f' = 1, g' = e^x g = e^x\} = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1)$$

נחזור לתרגיל:

$$y = \frac{1}{x}(e^x(x-1) + c) = \frac{c + e^x(x-1)}{x}$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = \frac{c + e(1-1)}{1} = c$$

$$c = 0$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = \frac{e^x(x-1)}{x}$$

ג. כאן היא הומוגנית עם $a(x) = -\frac{1}{x^2}, A(x) = \frac{1}{x}$, ולכן: $y = ce^{-A(x)} = ce^{-\frac{1}{x}}$. נציב תנאי התחלה:

$$e = ce^{-\frac{1}{1}}$$

$$c = e^2$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = e^{2-\frac{1}{x}}$$

3. מצאו פתרון פרטי של המד"ר, הבאות עם תנאי ההתחלה המתאימים:

(א) $\begin{cases} y' = x^3(y-3)^2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$.

(ב) $\begin{cases} y' = x^3(y-3)^2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$.

(ג) $\begin{cases} y' = 3y^2 \cos x \\ y(\pi) = 3 \end{cases}$.

(ד) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases}$. שימו לב שדרוש: $y \neq 0$, ולכן יש שני תחומים לפתרון: $y > 0$ או $y < 0$.

(ה) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

(ו) $\begin{cases} y' = \frac{\cos^2 y}{x^2+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

פתרון:

א. זו מד"ר פרידה.

פתרונות סינגולריים: $y = 3$.

פתרונות רגילים:

$$\frac{dy}{dx} = x^3(y-3)^2$$

$$\frac{dy}{(y-3)^2} = x^3 dx$$

$$\int \frac{dy}{(y-3)^2} = \int x^3 dx$$

$$-\frac{1}{y-3} = \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4 + 4c}{4} = \frac{x^4 + c}{4}$$

(כי $4c$ זה כמו קבוע חדש c). ולכן:

$$y = 3 - \frac{4}{x^4 + c}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$4 = 3 - \frac{4}{c}$$

$$c = -4$$

ב. זו אותה משוואה, אבל כאן תנאי ההתחלה הוא בפתרון הסינגולרי, ולכן הפתרון הוא הסינגולרי: $y = 3$.

ג. פתרונות סינגולריים: $y(x) = 0$.

פתרון כללי:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 \cos x$$

$$\frac{dy}{3y^2} = \cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2} = \int \cos x dx$$

$$\frac{-1}{3y} = \sin x + c$$

$$y = \frac{-1}{3 \sin x + 3c}$$

נציב תנאי התחלה:

$$3 = \frac{-1}{3 \sin \pi + 3c} = -\frac{1}{3c} \Rightarrow c = -\frac{1}{9}$$

ולכן הפתרון הוא:

$$y = -\frac{1}{3 \sin x - \frac{1}{3}}$$

ד+ה. אמנם אין פתרונות סינגולריים, אבל כאמור ישנם שני תחומים לפתרון, נתייחס לכך בהמשך. נפתור:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$ydy = xdx$$

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = x^2 + 2c$$

יש שני פתרונות כלליים, שכל אחד מהם נמצא בתחום אחר של המישור: $y = \sqrt{x^2 + 2c}$ נמצא בתחום $y > 0$. ו־ $y = -\sqrt{x^2 + 2c}$ נמצא בתחום $y < 0$.

כעת לפתרונות פרטיים:. עבור סעיף (ד) נקבל $y > 0$ ולכן נציב זאת במשוואה הראשונה:

$$\sqrt{2} = \sqrt{0^2 + 2c} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 2}$$

עבור סעיף (ה) נקבל $y<0$ ולכן נציב במשוואה השנייה:

$$-1=-\sqrt{0^2+2c}\Rightarrow 1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{c}\Rightarrow\sqrt{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow c=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\sqrt{x^2+1}$$

ו. פתרונות סינגולריים: $y(x)=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

פתרון כללי:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 y}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\cos^2 y}dy=\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 y}=\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\tan y=\arctan x+c$$

$$y=\arctan(\arctan x+c)$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה:

$$0=\arctan(\arctan 0+c)=\arctan c\Rightarrow c=0$$

ולכן:

$$y=\arctan(\arctan x)$$

בהצלחה!